МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет архитектуры и строительства»

УТВЕРЖДАЮ
Руководитель направления подготовки
38.03.01 «Экономика»
код и наименование направления подготовки
________________ / Резник С.Д. /
«28» сентября 2017 г.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ «ТЕОРИЯ ИГР»

Уровень высшего образования: бакалавриат

Направление подготовки: 38.03.01 «Экономика»

Направленность (профиль): Экономика организации
Перечень учебно-методических материалов:
1. Методические указания к практическим занятиям
2. Методические указания по самостоятельной работе
3. Методические указания для подготовки к зачету

Пенза 2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»

УТВЕРЖДАЮ
Руководитель направления подготовки
38.03.01 «Экономика»
код и наименование направления подготовки
/ Резник С.Д. /
«28» сентября 2017 г.

Е.И. Куимова

Теория игр

Методические указания к практическим занятиям
(направление подготовки 38.03.01 – Экономика)

Пенза 2017

УДК
ББК
Г

Рецензент: д.т.н., профессор И.А.Гарькина
(кафедра МиММ, ПГУАС)

Куимова Е.И. Теория игр: Методические указания к практическим занятиям (направление подготовки 38.03.01 – Экономика) / Е.И. Куимова. – Пенза: ПГУАС, 2017. – с.

Приводятся методические рекомендации по проведению практических занятий, исходя из требований к формированию компетенций, предусмотренных ФОС по направлению подготовки бакалавров 38.03.01 – Экономика.

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Теория игр» относится к вариативной части ООП (**Б1.В.ОД.5).**

Процесс изучения дисциплины (модуля) направлен на формирование следующих компетенций, **ОК-7 (**способность к самоорганизации и самообразованию), **ОПК-1** (способность решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности).

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

знать – знать определения и свойства основных понятий, моделей и методов, рассмотренных в курсе;
уметь – уметь применять их при анализе предлагаемых учебных и упрощённых реальных ситуаций;
владеть

– навыками применения современного математического инструментария теории игр для решения экономических задач;

– методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов (в части компетенций, соответствующих методам теории игр.

Типовые задания с примерами их решения

Задание 1

Дайте геометрическую интерпретацию решения игры для двух игроков по заданной матрице выигрышей

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим игру двух лиц, интересы которых противоположны. Такие игры называют антагонистическими играми двух лиц. В этом случае выигрыш одного игрока равен проигрышу второго, и можно описать только одного из игроков.

Предполагается, что каждый игрок может выбрать только одно из конечного множества своих действий. Выбор действия называют выбором стратегии игрока.

Если каждый из игроков выбрал свою стратегию, то эту пару стратегий называют ситуацией игры. Следует заметить, каждый игрок знает, какую стратегию выбрал его противник, т.е. имеет полную информацию о результате выбора противника. Чистой стратегией игрока I является выбор одной из n строк матрицы выигрышей А, а чистой стратегией игрока II является выбор одного из столбцов этой же матрицы.

Проверяем, имеет ли платежная матрица седловую точку. Если да, то выписываем решение игры в чистых стратегиях. Считаем, что игрок A выбирает свою стратегию так, чтобы получить максимальный свой выигрыш, а игрок B выбирает свою стратегию так, чтобы минимизировать выигрыш игрока A.

Игроки	B_1	B_2	$a = min(A_i)$
A_1	2	3	2
A_2	4	1	1
$b = max(B_i)$	4	3	

Находим гарантированный выигрыш, определяемый нижней ценой игры $a = max(a_i) = 2$, которая указывает на максимальную чистую стратегию A_1. Верхняя цена игры $b = min(b_j) = 3$. Что свидетельствует об отсутствии седловой точки, так как $a \neq b$, тогда цена игры находится в пределах $2 \leq V \leq 3$. Находим решение игры в смешанных стратегиях. Объясняется это тем, что игроки не могут объявить противнику свои чистые стратегии: им следует скрывать свои действия. Игру можно решить, если позволить игрокам выбирать свои стратегии случайным образом (смешивать чистые стратегии). Так как игроки выбирают свои чистые стратегии случайным образом, то выигрыш игрока A будет случайной величиной. В этом случае игрок A должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы получить максимальный средний выигрыш.

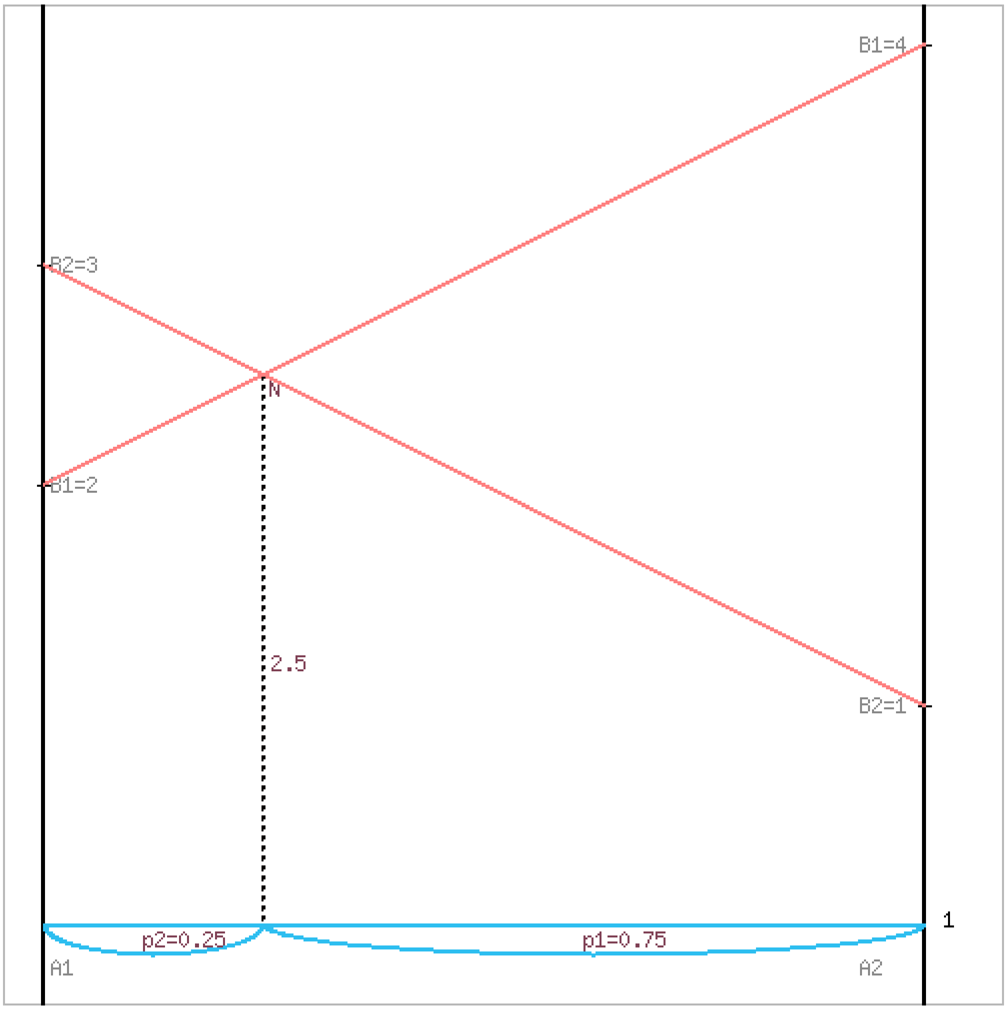
Аналогично, игрок B должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы минимизировать математическое ожидание игрока A.

Находим решение игры в смешанных стратегиях.

Решим задачу графическим методом, который включает в себя следующие этапы

1. В декартовой системе координат по оси абсцисс (оси вероятностей p) откладывается отрезок, длина которого равна 1. Левый конец отрезка (точка $p = 0$) соответствует стратегии A_1, правый - стратегии A_2 ($p = 1$). Промежуточные точки p соответствуют вероятностям некоторых смешанных стратегий $S_1 = (p_1,p_2)$.

2. На левой оси ординат откладываются выигрыши стратегии A_1. На линии, параллельной оси ординат, из точки 1 откладываются выигрыши стратегии A_2. Решение игры проводим с позиции игрока A, придерживающегося максиминной стратегии. Доминирующихся и дублирующих стратегий ни у одного из игроков нет.



Выделяем нижнюю границу выигрыша B_1NB_2. Максиминной оптимальной стратегии игрока A соответствует точка N, лежащая на пересечении прямых B_1B_1 и B_2B_2, для которых можно записать следующую систему уравнений:

$V = 2 + (4 - 2)p_2$

$V = 3 + (1 - 3)p_2$

Откуда $p_1 = 3/4$, $p_2 = 1/4$.

Цена игры $y = 5/2$.

Теперь можно найти минимаксную стратегию игрока B, записав соответствующую систему уравнений

$2q_1+3q_2 = V$

$4q_1+q_2 = V$

$q_1+q_2 = 1$

или

$2q_1+3q_2 = {}^5/_2$

$4q_1+q_2 = {}^5/_2$

$q_1+q_2 = 1$

Решая эту систему, находим:

$q_1 = {}^1/_2$, $q_2 = {}^1/_2$.

Ответ: Цена игры: $V = {}^5/_2$, векторы стратегий игроков: $Q({}^1/_2, {}^1/_2)$, $P({}^3/_4, {}^1/_4)$.

Задание 2

Дайте геометрическую интерпретацию решения игры для двух игроков по заданной матрице выигрышей

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Проверяем, имеет ли платежная матрица седловую точку. Если да, то выписываем решение игры в чистых стратегиях. Считаем, что игрок A выбирает свою стратегию так, чтобы получить максимальный свой выигрыш, а игрок B выбирает свою стратегию так, чтобы минимизировать выигрыш игрока A.

Игроки	B_1	B_2	B_3	B_4	$a = min(A_i)$
A_1	1	3	-1	5	-1
A_2	4	-2	5	3	-2
$b = max(B_i)$	4	3	5	5	

Находим гарантированный выигрыш, определяемый нижней ценой игры
$a = max(a_i) = -1$, которая указывает на максимальную чистую стратегию A_1. Верхняя цена игры $b = min(b_j) = 3$. Что свидетельствует об отсутствии седловой точки, так как $a \neq b$, тогда цена игры находится в пределах $-1 \leq V \leq 3$. Находим решение игры в смешанных стратегиях. Объясняется это тем, что игроки не могут объявить противнику свои чистые стратегии: им следует скрывать свои действия. Игру можно решить, если позволить игрокам выбирать свои стратегии случайным образом (смешивать чистые стратегии).

Проверяем платежную матрицу на доминирующие строки и доминирующие столбцы.Иногда на основании простого рассмотрения матрицы игры можно сказать, что некоторые чистые стратегии могут войти в оптимальную смешанную стратегию лишь с нулевой вероятностью. Говорят, что *i-я* стратегия 1-го игрока доминирует его *k-ю* стратегию, если $a_{ij} \geq a_{kj}$ для всех j и хотя бы для одного j выполняется условие $a_{ij} > a_{kj}$. В этом случае говорят также, что *i-я* стратегия (или строка) – доминирующая, *k-я* – доминируемая.

Говорят, что *j-я* стратегия 2-го игрока доминирует его *l-ю* стратегию, если для всех j $a_{ij} \leq a_{il}$ и хотя бы для одного i $a_{ij} < a_{il}$. В этом случае *j-ю* стратегию (столбец) называют доминирующей, *l-ю* – доминируемой. С позиции проигрышей игрока B стратегия B_2 доминирует над стратегией B_4 (все элементы столбца 2 меньше элементов столбца 4), следовательно, исключаем 4-й столбец матрицы. Вероятность $q_4 = 0$.

1	3	-1

4	-2	5

В платежной матрице доминирующие строки отсутствуют. Мы свели игру 2×4 к игре 2×3.

Так как игроки выбирают свои чистые стратегии случайным образом, то выигрыш игрока A будет случайной величиной. В этом случае игрок A должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы получить максимальный средний выигрыш.

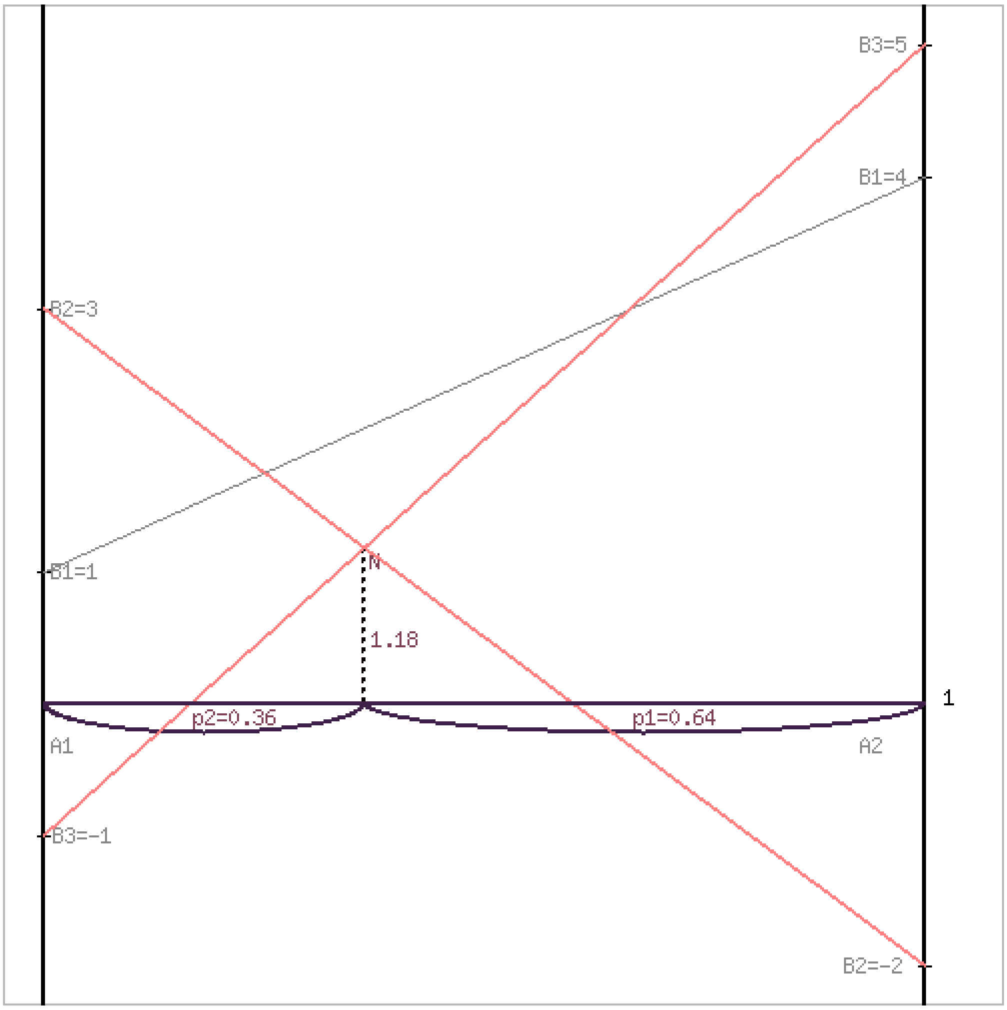
Аналогично, игрок B должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы минимизировать математическое ожидание игрока A.

Находим решение игры в смешанных стратегиях.

Решим задачу геометрическим методом, который включает в себя следующие этапы:

1. В декартовой системе координат по оси абсцисс (оси вероятностей p) откладывается отрезок, длина которого равна 1. Левый конец отрезка (точка $p = 0$) соответствует стратегии A_1, правый - стратегии A_2 ($p = 1$). Промежуточные точки p соответствуют вероятностям некоторых смешанных стратегий $S_1 = (p_1,p_2)$.

2. На левой оси ординат откладываются выигрыши стратегии A_1. На линии, параллельной оси ординат, из точки 1 откладываются выигрыши стратегии A_2. Решение игры проводим с позиции игрока A, придерживающегося максиминной стратегии. Доминирующихся и дублирующих стратегий ни у одного из игроков нет.



Выделяем нижнюю границу выигрыша B_2NB_3. Максиминной оптимальной стратегии игрока A соответствует точка N, лежащая на пересечении прямых B_2B_2 и B_3B_3, для которых можно записать следующую систему уравнений:

$V = 3 + (-2 - 3)p_2$

$V = -1 + (5 - (-1))p_2$

Откуда

$p_1 = {}^{7}/_{11}$

$p_2 = {}^{4}/_{11}$

Цена игры, $V = {}^{13}/_{11}$

Теперь можно найти минимаксную стратегию игрока B, записав соответствующую систему уравнений, исключив стратегию B_1, которая дает явно больший проигрыш игроку B, и, следовательно, $q_1 = 0$.

$3q_2-q_3 = V$

$-2q_2+5q_3 = V$

$q_2+q_3 = 1$

или

$3q_2-q_3 = {}^{13}/_{11}$

$-2q_2+5q_3 = {}^{13}/_{11}$

$q_2+q_3 = 1$

Решая эту систему, находим:

$q_2 = {}^{6}/_{11}$.

$q_3 = {}^{5}/_{11}$.
Ответ: Цена игры: $V = {}^{13}/_{11}$, векторы стратегий игроков:
$Q(0, {}^{6}/_{11}, {}^{5}/_{11})$, $P({}^{7}/_{11}, {}^{4}/_{11})$.

Задание 3

Дайте геометрическую интерпретацию решения игры для двух игроков по заданной матрице выигрышей

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Проверяем, имеет ли платежная матрица седловую точку. Если да, то выписываем решение игры в чистых стратегиях.
Считаем, что игрок A выбирает свою стратегию так, чтобы получить максимальный свой выигрыш, а игрок B выбирает свою стратегию так, чтобы минимизировать выигрыш игрока A.

Игроки	B_1	B_2	$a = min(A_i)$
A_1	-4	3	-4
A_2	1	2	1
A_3	4	1	1
A_4	3	-5	-5
A_5	-2	4	-2
$b = max(B_i)$	4	4	

Находим гарантированный выигрыш, определяемый нижней ценой игры $a = max(a_i) = 1$, которая указывает на максимальную чистую стратегию A_2. Верхняя цена игры $b = min(b_j) = 4$. Что свидетельствует об отсутствии седловой точки, так как $a \neq b$, тогда цена игры находится в пределах $1 \le V \le 4$. Находим решение игры в смешанных стратегиях. Объясняется это тем, что игроки не могут объявить противнику свои чистые стратегии: им следует скрывать свои действия. Игру можно решить, если позволить игрокам выбирать свои стратегии случайным образом (смешивать чистые стратегии).

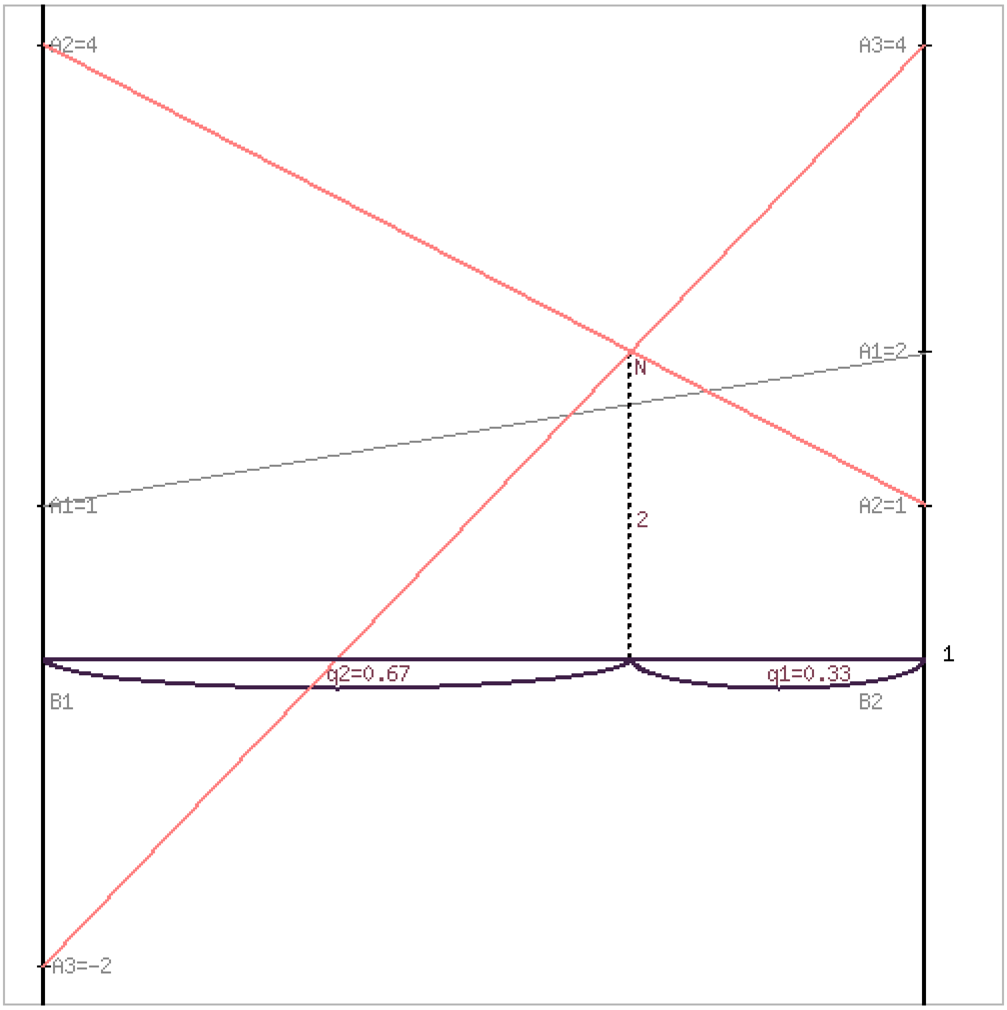
Проверяем платежную матрицу на доминирующие строки и доминирующие столбцы. Стратегия A_5 доминирует над стратегией A_1 (все элементы строки 5 больше или равны значениям 1-ой строки), следовательно, исключаем 1-ую строку матрицы. Вероятность p_1 = 0. Стратегия A_3 доминирует над стратегией A_4 (все элементы строки 3 больше или равны значениям 4-ой строки), следовательно, исключаем 4-ую строку матрицы. Вероятность p_4 = 0.

1	2
4	1
-2	4

В платежной матрице отсутствуют доминирующие столбцы. Мы свели игру 5×2 к игре 3×2.

Находим решение игры в смешанных стратегиях. Решим задачу геометрическим методом, который включает в себя следующие этапы: 1. В декартовой системе координат по оси абсцисс (оси вероятностей p) откладывается отрезок, длина которого равна 1. Левый конец отрезка (точка p = 0) соответствует стратегии A_1, правый - стратегии A_2 (p = 1). Промежуточные точки p соответствуют вероятностям некоторых смешанных стратегий $S_1 = (p_1,p_2)$.

2. На левой оси ординат откладываются выигрыши стратегии A_1. На линии, параллельной оси ординат, из точки 1 откладываются выигрыши стратегии A_2. Решение игры проводим с позиции игрока A, придерживающегося максиминной стратегии. Доминирующихся и дублирующих стратегий ни у одного из игроков нет.



Выделяем верхнюю границу выигрыша A_2NA_3. Максиминной оптимальной стратегии игрока *B* соответствует точка *N*, лежащая на пересечении прямых A_2A_2 и A_3A_3, для которых можно записать следующую систему уравнений:

$V = 4 + (1 - 4)q_2$

$V = -2 + (4 - (-2))q_2$

Откуда

$q_1 = {}^1/_3$

$q_2 = {}^2/_3$

Цена игры, $V = 2$. Теперь можно найти минимаксную стратегию игрока *A*, записав соответствующую систему уравнений, исключив стратегию A_1, которая дает явно больший проигрыш игроку *A*, и, следовательно, $p_1 = 0$.

$4p_2\text{-}2p_3 = V$

$p_2+4p_3 = V$

$p_2+p_3 = 1$

или

$4p_2\text{-}2p_3 = 2$

$p_2+4p_3 = 2$

$p_2+p_3 = 1$

Решая эту систему, находим:

$p_2 = {}^2/_3$.
$p_3 = {}^1/_3$.
Ответ: Цена игры: $V = 2$, векторы стратегий игроков: $P(0, {}^2/_3, {}^1/_3)$, $Q({}^1/_3, {}^2/_3)$.

Задание 4

Найти аналитическим методом решения игры для двух игроков по заданной матрице выигрышей

2	9	10	5
3	4	8	7
-4	3	-4	-2
8	5	-3	-4

Игроки	B_1	B_2	B_3	B_4	$a = min(A_i)$
A_1	2	9	10	5	2
A_2	3	4	8	7	3
A_3	-4	3	-4	-2	-4
A_4	8	5	-3	-4	-4
$b = max(B_i)$	8	9	10	7	

Находим гарантированный выигрыш, определяемый нижней ценой игры $a = max(a_i) = 3$, которая указывает на максимальную чистую стратегию A_2. Верхняя цена игры $b = min(b_j) = 7$. Что свидетельствует об отсутствии седловой точки, так как $a \neq b$, тогда цена игры находится в пределах $3 \leq V \leq 7$. Находим решение игры в смешанных стратегиях. Объясняется это тем, что игроки не могут объявить противнику свои чистые стратегии: им следует скрывать свои действия. Игру можно решить, если позволить игрокам выбирать свои стратегии случайным образом (смешивать чистые стратегии).

Проверяем платежную матрицу на доминирующие строки и доминирующие столбцы. Стратегия A_1 доминирует над стратегией A_3 (все элементы строки 1 больше или равны значениям 3-ой строки), следовательно, исключаем 3-ую строку матрицы. Вероятность $p_3 = 0$.

2	9	10	5
3	4	8	7
8	5	-3	-4

С позиции проигрышей игрока B стратегия B_4 доминирует над стратегией B_3 (все элементы столбца 4 меньше элементов столбца 3), следовательно, исключаем 3-й столбец матрицы. Вероятность $q_3 = 0$.

2	9	5
3	4	7
8	5	-4

Мы свели игру 4×4 к игре 3×3.

В матрице присутствуют отрицательные элементы. Для упрощения расчетов добавим к элементам матрицы (4). Такая замена не изменит решения игры, изменится только ее цена (по теореме фон Неймана).

6	13	9
7	8	11
12	9	0

Находим решение игры в смешанных стратегиях.

Математические модели пары двойственных задач линейного программирования можно записать так: найти минимум функции $F(x)$ при ограничениях (для игрока B):

$$6x_1+7x_2+12x_3 \geq 1$$
$$13x_1+8x_2+9x_3 \geq 1$$
$$9x_1+11x_2 \geq 1$$
$$F(x) = x_1+x_2+x_3 \to min$$

И найти максимум функции $Z(y)$ при ограничениях (для игрока A):

$$6y_1+13y_2+9y_3 \leq 1$$
$$7y_1+8y_2+11y_3 \leq 1$$
$$12y_1+9y_2 \leq 1$$
$$Z(y) = y_1+y_2+y_3 \to max.$$

Решим прямую задачу линейного программирования симплексным методом, с использованием симплексной таблицы.

Определяем максимальное значение целевой функции $Z(y)$.

Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных (переход к канонической форме).

$6y_1 + 13y_2 + 9y_3 + 1y_4 + 0y_5 + 0y_6 = 1$

$7y_1 + 8y_2 + 11y_3 + 0y_4 + 1y_5 + 0y_6 = 1$

$12y_1 + 9y_2 + 0y_3 + 0y_4 + 0y_5 + 1y_6 = 1$

Решим систему уравнений относительно базисных переменных: y_4, y_5, y_6. Полагая, что свободные переменные равны 0, получим первый опорный план:
$Y_0 = (0,0,0,1,1,1)$

Базис	B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_4	1	6	13	9	1	0	0
y_5	1	7	8	11	0	1	0
y_6	1	12	9	0	0	0	1
$Z(Y_0)$	0	-1	-1	-1	0	0	0

Переходим к основному алгоритму симплекс-метода.
Итерация №0.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.
В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной y_3, так как это наибольший коэффициент по модулю. Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i3} и из них выберем наименьшее: min (1 : 9 , 1 : 11 , -) = $^1/_{11}$. Следовательно, 2-ая строка является ведущей. Разрешающий элемент равен 11 и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Базис	B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	min
y_4	1	6	13	9	1	0	0	$^1/_9$
y_5	1	7	8	**11**	0	1	0	$\mathbf{^1/_{11}}$
y_6	1	12	9	0	0	0	1	-
$Z(Y_1)$	0	-1	-1	**-1**	0	0	0	

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной y_5 в план 1 войдет переменная y_3. Получаем новую симплекс-таблицу:

Базис	B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_4	$^2/_{11}$	$^3/_{11}$	$^{71}/_{11}$	0	1	$^{-9}/_{11}$	0

y_3	$^1/_{11}$	$^7/_{11}$	$^8/_{11}$	1	0	$^1/_{11}$	0
y_6	1	12	9	0	0	0	1
$Z(Y_1)$	$^1/_{11}$	$^{-4}/_{11}$	$^{-3}/_{11}$	0	0	$^1/_{11}$	0

Итерация №1.
Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты. В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной y_1, так как это наибольший коэффициент по модулю. Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i1} и из них выберем наименьшее:
min ($^2/_{11}$: $^3/_{11}$, $^1/_{11}$: $^7/_{11}$, 1 : 12) = $^1/_{12}$. Следовательно, 3-ая строка является ведущей.
Разрешающий элемент равен 12 и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Базис	B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	min
y_4	$^2/_{11}$	$^3/_{11}$	$^{71}/_{11}$	0	1	$^{-9}/_{11}$	0	$^2/_3$
y_3	$^1/_{11}$	$^7/_{11}$	$^8/_{11}$	1	0	$^1/_{11}$	0	$^1/_7$
y_6	1	**12**	9	0	0	0	1	**$^1/_{12}$**
$Z(Y_2)$	$^1/_{11}$	**$^{-4}/_{11}$**	$^{-3}/_{11}$	0	0	$^1/_{11}$	0	

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной y_6 в план 2 войдет переменная y_1. Получаем новую симплекс-таблицу:

Базис	B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_4	$^7/_{44}$	0	$^{25}/_4$	0	1	$^{-9}/_{11}$	$^{-1}/_{44}$
y_3	$^5/_{132}$	0	$^1/_4$	1	0	$^1/_{11}$	$^{-7}/_{132}$
y_1	$^1/_{12}$	1	$^3/_4$	0	0	0	$^1/_{12}$
$Z(Y_2)$	$^4/_{33}$	0	0	0	0	$^1/_{11}$	$^1/_{33}$

Конец итераций: индексная строка не содержит отрицательных элементов -

найден оптимальный план. Среди значений индексной строки нет отрицательных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи. Окончательный вариант симплекс-таблицы:

Базис	B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_4	$^7/_{44}$	0	$^{25}/_4$	0	1	$^{-9}/_{11}$	$^{-1}/_{44}$
y_3	$^5/_{132}$	0	$^1/_4$	1	0	$^1/_{11}$	$^{-7}/_{132}$
y_1	$^1/_{12}$	1	$^3/_4$	0	0	0	$^1/_{12}$
$Z(Y_3)$	$^4/_{33}$	0	0	0	0	$^1/_{11}$	$^1/_{33}$

Оптимальный план можно записать так: $y_1 = {}^1/_{12}$, $y_2 = 0$, $y_3 = {}^5/_{132}$,
$Z(Y) = {}^4/_{33}$.

Используя последнюю итерацию прямой задачи найдем, оптимальный план двойственной задачи: $x_1=0$, $x_2={}^1/_{11}$, $x_3={}^1/_{33}$, $F(X) = {}^4/_{33}$. Цена игры будет равна $V=1/F(x)$, а вероятности применения стратегий игроков: $q_i = V\cdot y_i$; $p_i = V\cdot x_i$.

Цена игры: $V = \dfrac{1}{4/33} = \dfrac{33}{4}$.

$p_1 = {}^{33}/_4 \cdot 0 = 0$

$p_2 = {}^{33}/_4 \cdot {}^1/_{11} = {}^3/_4$

$p_3 = {}^{33}/_4 \cdot {}^1/_{33} = {}^1/_4$

Оптимальная смешанная стратегия игрока A: $P = (0; {}^3/_4; {}^1/_4)$.

$q_1 = {}^{33}/_4 \cdot {}^1/_{12} = {}^{11}/_{16}$

$q_2 = {}^{33}/_4 \cdot 0 = 0$

$q_3 = {}^{33}/_4 \cdot {}^5/_{132} = {}^5/_{16}$

Оптимальная смешанная стратегия игрока B: $Q = ({}^{11}/_{16}; 0; {}^5/_{16})$. Поскольку ранее к элементам матрицы было прибавлено число 4, то вычтем это число из цены игры.

$8^1/_4 - 4 = 4^1/_4$

Цена игры: $V={}^{17}/_4$.

Задание 4

Найти аналитическим методом решения биматричной игры для двух игроков по заданным матрицам выигрышей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

В каждом столбце матрицы A найдем максимальный элемент. Эти элементы подчеркнуты в матрице A. Их положение соответствует приемлемым ситуациям 1-го игрока, когда второй игрок выбрал стратегию j соответственно.

Затем в каждой строке матрицы B выберем наибольший элемент. Эти элементы подчеркнуты в матрице B. Их положение будет определять приемлемые ситуации 2-го игрока, когда первый игрок выбрал стратегию i соответственно.

Платежная матрица игрока A:

1	**5**
3	2

Позиции максимумов в столбцах матрицы A: (2,1), (1,2).

Платежная матрица игрока B:

5	2
1	**4**

Позиции максимумов в строках матрицы B: (1,1), (2,2).

Если биматричная игра не имеет равновесных ситуаций в чистых стратегиях, то она неразрешима в чистых стратегиях. И тогда можно искать решение в смешанных стратегиях.

Вследствие того, что в биматричных играх интересы игроков не совпадают, необходимо построить такое решение, которое бы в том или ином, но в одинаковом смысле удовлетворяло обоих игроков. Задание смешанной стратегии игрока состоит в указании тех вероятностей, с которыми выбираются его первоначальные стратегии. У игроков имеется ровно по две стратегии, вероятности которых

– для игрока A: $p_1=p$, $p_2=1-p$,

– для игрока B: $q_1=q$, $q_2=1-q$,

а средние выигрыши вычисляются по формулам:

$H_a(p,q)=a_{11}pq+a_{12}p(1-q)+a_{21}(1-p)q+a_{22}(1-p)(1-q)$,

$H_b(p,q)=b_{11}pq+b_{12}p(1-q)+b_{21}(1-p)q+b_{22}(1-p)(1-q)$,

где $0 \le p \le 1$, $0 \le q \le 1$,

Всякая биматричная игра имеет хотя бы одну равновесную ситуацию (точку равновесия) в смешанных стратегиях, от которой невыгодно отклоняться. Ищем пару чисел (p^*,q^*), $0 \le p^* \le 1$, $0 \le q^* \le 1$, для которых одновременно выполнены следующие неравенства

$$H_A(p,q^*) \le H_A(p^*, q^*)$$
$$H_B(p^*,q^*) \ge H_B(p^*, q)$$

Если некоторая пара чисел (p^*, q^*) претендует на то, чтобы определить ситуацию равновесия, то достаточно проверить справедливость неравенств

$H_A(0, q^*) \le H_A(p^*, q^*)$, $H_B(p^*, 0) \le H_B(p^*, q^*)$,

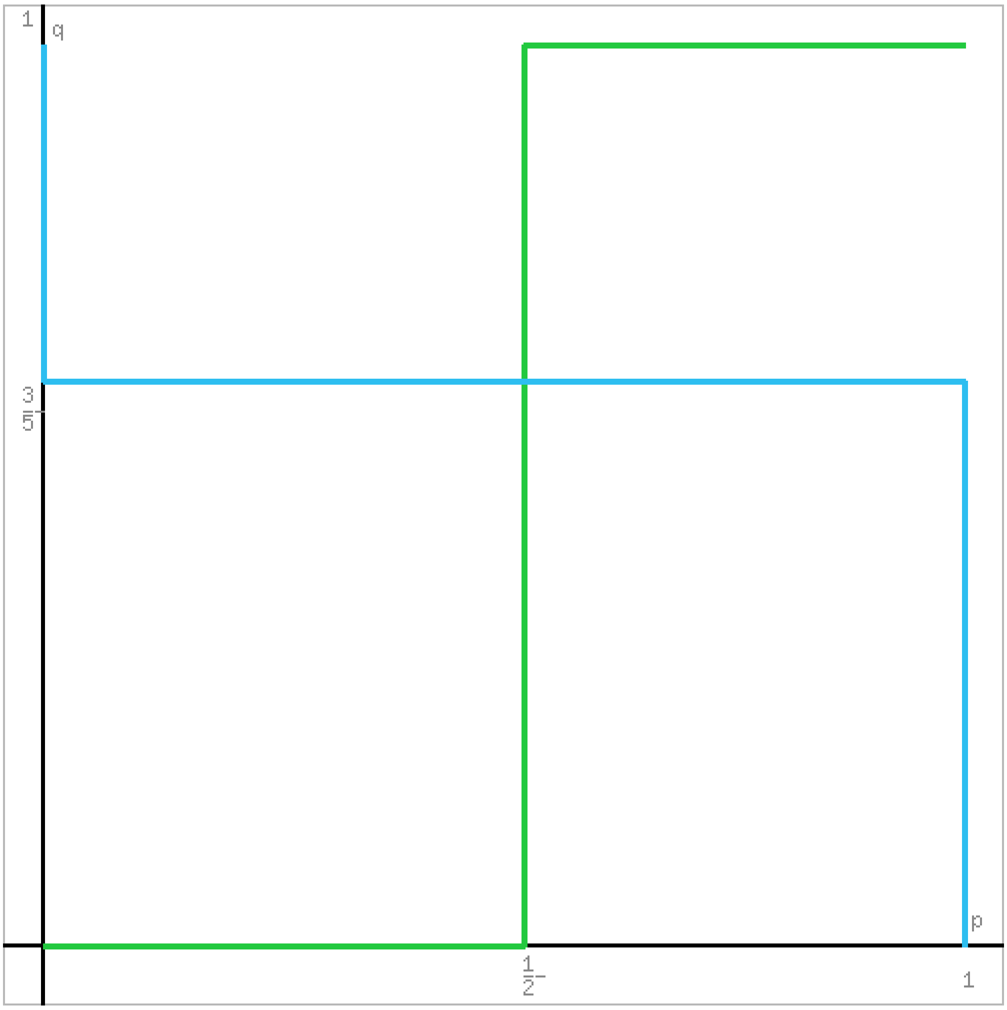
$H_A(1, q^*) \le H_A(p^*, q^*)$, $H_B(p^*, 1) \le H_B(p^*, q^*)$.

Запишем средние выигрыши игроков A и B в более удобной форме.

А именно,

$H_A(p,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p + (a_{21} - a_{22})q + a_{22}$;
$H_B(p,q) = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})pq + (b_{12} - b_{22})p + (b_{21} - b_{22})q + b_{22}$.
Обратимся к первой формуле.
Полагая $p = 1$, а потом $p = 0$, получаем,
$H_A(1,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})q + a_{12} + (a_{21} - a_{22})q$,
$H_A(0,q) = (a_{21} - a_{22})q + a_{22}$
Рассмотрим разности
$H_A(p,q) - H_A(1,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p – (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})q + a_{22} – a_{12}$,
$H_A(p,q) - H_A(0,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p$
Полагая $C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$, $\alpha = a_{22} - a_{12}$, получим
$H_A(p,q) - H_A(1,q) = Cpq – \alpha p – Cq + \alpha = (p–1)(Cq-\alpha)$;
$H_A(p,q) - H_A(0,q) = Cpq – \alpha p = p(Cq-\alpha)$.
В случае, если пара (p,q) определяет точку равновесия, эти разности неотрицательны, поэтому:
$(p–1)(Cq-\alpha) \geq 0$, $p(Cq-\alpha) \geq 0$
Из формул для функции $H_B(p,q)$ при q=1, q=0 соответственно имеем:
$H_B(p,1) = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})p + (b_{12} - b_{22})p + b_{21}$,
$H_B(p,0) = (b_{12} - b_{22})p + b_{22}$.
Разности $H_B(p,q) - H_B(p,1)$ и $H_B(p,q) - H_B(p,0)$ с учётом обозначений
$D = b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22}$, $\beta = b_{22}-b_{21}$
приводятся к виду
$H_b(p,q) = H_b(p,1) = (q-1)(Dp-\beta)$,
$H_b(p,q) = H_b(p,0) = q(Dp-\beta)$.
И $(q-1)(Dp-\beta) \geq 0$, $q(Dp-\beta) \geq 0$
Итак, чтобы в биматричной игре пара (p,q) определяла равновесную ситуацию, необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих неравенств:
$(p–1)(Cq-\alpha) \geq 0$, $p(Cq-\alpha) \geq 0$; $0 \leq p \leq 1$
$(q-1)(Dp-\beta) \geq 0$, $q(Dp-\beta) \geq 0$; $0 \leq q \leq 1$
где $C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$; $\alpha = a_{22}- a_{12}$; $D = b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22}$; $\beta = b_{22}-b_{21}$
Проводя необходимые вычисления:
$C = 1 - 5 - 3 + 2 = -5$; $\alpha = 2 - 5 = -3$, $D = 5 - 2 - 1 + 4 = 6$, $\beta = 4 - 1 = 3$
получаем систему неравенств
$(p–1)(-5q+3) \geq 0$
$p(-5q+3) \geq 0$
$(q-1)(6p-3) \geq 0$
$q(6p-3) \geq 0$
получаем, что:

– если p=1, то $q \leq {}^3/_5$, если p=0, $q \geq {}^3/_5$;
– если $0 \leq p \leq 1$, то $q={}^3/_5$;
– если q=1, то $p \geq {}^1/_2$;
– если q=0, $p \leq {}^1/_2$;
– если $0 \leq q \leq 1$, $p={}^1/_2$.



Рассматриваемая игра имеет единственную ситуацию равновесия (P^*,Q^*), где оптимальными стратегиями по Нэшу являются: $P^* = (^1/_2;^1/_2)$; $Q^* = (^3/_5;^2/_5)$. Таким образом, она может быть реализована при многократном повторении игры (то есть при многократном воспроизведении описанной ситуации) следующим образом: игрок A должен использовать чистые стратегии 1 и 2 с частотами $^1/_2$ и $^1/_2$, а игрок B – чистые стратегии 1 и 2 с частотами $^3/_5$ и $^2/_5$. Любой из игроков, отклонившись от указанной смешанной стратегии, уменьшает свой ожидаемый выигрыш.

Цена игры для первого игрока: $H_a(^1/_2;^3/_5) = 2^3/_5$,

Цена игры для второго игрока: $H_b(^1/_2;^3/_5) = 3$.

Ответ: Смешанная стратегия для первого игрока $P^* = (^1/_2;^1/_2)$; Смешанная стратегия для второго игрока $Q^* = (^3/_5;^2/_5)$.

Выигрыш игроков в равновесной ситуации: $H(P^*,Q^*) = (2^3/_5;3)$.

Задание 5

Имеются две фирмы: первая может произвести одно из двух изделий A_1 и A_2, вторая – одно из трех изделий B_1, B_2 и B_3. Если первая фирма произведет продукцию A_i, $i=\overline{1,2}$, а вторая – B_j, $j=\overline{1,3}$, то прибыль этих фирм (зависящая от того, являются ли эти изделия взаимодополняющими или конкурирующими) определяется таблицей

	B_1	B_2	B_3
A_1	$[3,3]$	$[0,0]$	$[4,1]$
A_2	$[2,0]$	$[1,5]$	$[2,2]$

Считая, что фирмы заключают между собой соглашение, определить справедливое распределение прибыли, используя арбитражное решение Нэша.

Построим в декартовой системе координат многоугольник всевозможных исходов игры. Выделим в этом многоугольнике множество Парето-оптимальных решений (северо-восточную границу).

Вычисляем цену игры отдельно для каждого игрока, то есть по матрицам

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 5 & 2\end{pmatrix}.$$

Результатом будет $V_A=1,\ V_B=\dfrac{15}{8}$. Следовательно, функция полезности по Нэшу примет вид:

$$U=\left(H_1-1\right)\cdot\left(H_2-\frac{15}{8}\right).$$

Введем новую систему координат в точку $O'\left(1,\dfrac{15}{8}\right)$. Оптимальным решением задачи поиска максимума функции полезности является точка касания линии уровня этой функции одним из отрезков северо-восточной границы, в данном случае, с отрезком MN. Определим уравнение прямой MN через заданные точки $M\left(0,\dfrac{25}{8}\right)$ и $N\left(2,\dfrac{9}{8}\right)$ в системе $O'H_1'H_2'$. Получим уравнение $8H_1+8H_2=25$.

Чтобы определить координаты оптимальной точки M^*, решим следующую оптимизационную задачу: найти максимум целевой функции

$$U=H_1'\cdot H_2',$$

при условии, что

$$8H_1+8H_2=25.$$

Построим функцию Лагранжа:

$$L\left(H_1',H_2',\lambda\right)=H_1'\cdot H_2'+\lambda\left(25-8H_1'-8H_2'\right).$$

Вычислив частные производные первого порядка и приравняв их к нулю, получим систему уравнений

$$\begin{cases} H_2'-8\lambda=0,\\ H_1'-8\lambda=0,\\ 25-8H_1'-8H_2'=0,\end{cases}$$

решение которой имеет вид

$$H_1' = \frac{25}{16},\ H_2' = \frac{25}{16}.$$

Перейдя к старым координатам, получим

$$H_1 = \frac{25}{16} + 1 = \frac{41}{16},\ H_2 = \frac{25}{16} + \frac{15}{8} = \frac{55}{16}.$$

Для определения оптимальной смешанной стратегии в этой коалиционной игре, нужно смешать ситуации, соответствующие точкам $M(1,5)$ и $N(3,3)$ в некоторой пропорции так, чтобы выполнялось равенство:

$$p \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + (1-p) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41/16 \\ 55/16 \end{pmatrix}.$$

Решив это уравнение, получим

$$p = \frac{7}{32},\ 1-p = \frac{25}{32}.$$

Следовательно, для получения справедливой доли, фирмы должны воспроизводить ситуацию, соответствующую точке $M(1,5)$ (стратегии A_2 и B_2) с частотой 7/32, а ситуацию, соответствующую точке $N(3,3)$ (стратегии A_1 и B_1) с частотой 25/32, остальные ситуации не воспроизводить совсем. При этом средний выигрыш первого игрока будет равен 41/16, а второго – 55/16.

Задание 6

Найти оптимальную стратегию в игре с природой по заданной матрице выигрышей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & 8 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сравнить результаты расчетов по критериям

- **максимакса;**
- **Вальда;**
- **Сэвиджа;**
- **Гурвица.**

Матрица выигрышей соответствует трем возможным стратегиям игрока A_1, A_2 *и* A_3 при четырех состояниях природы Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4.

1) *Критерий максимакса.*

Это критерий крайнего оптимизма, максимизирующий максимальные выигрыши для каждого состояния природы по формуле

$$M = \max_i \max_j a_{ij}.$$

В данном случае

$$M = \max(9,8,6) = 9,$$

что соответствует стратегии A_1.

2) *Максиминный критерий Вальда*.

При применении данного критерия природа рассматривается как агрессивно настроенный и сознательно действующий противник, как в матричной игре. Поэтому выбирается стратегия, гарантирующая выигрыш не меньший, чем «нижняя цена игры с природой»:

$W = \max_i \min_j a_{ij}$.

Для данной матрицы этот критерий дает

$W = \max(1,3,2) = 3,$

что соответствует стратегии A_2.

3) *Критерий минимального риска Сэвиджа*

Этот критерий аналогичен критерию Вальда, только игрок в этой ситуации руководствуется матрицей рисков и выбирает стратегию, при которой достигается минимально возможный из наибольших рисков:

$$S = \max_i \min_j r_{ij}$$

Для данной матрицы строим матрицу рисков:

- Показателем благоприятности состояния Q_j природы называется наибольший выигрыш β_j при этом состоянии, то есть наибольший элемент j-го столбца.
  В данном случае $\beta_1 = 4,\ \beta_2 = 8,\ \beta_3 = 6,\ \beta_4 = 9$.
- Риском r_{ij} игрока A при выборе им стратегии A_i и при состоянии природы Q_j называется разность между показателем благоприятности β_j и выигрышем a_{ij}.
  Матрица рисков:

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

- Максимально возможные риски:
  при стратегии A_1 – 4;
  при стратегии A_2 – 6;
  при стратегии A_3 – 7.
- $S = \min(4,6,7) = 4.$

То есть лучшей стратегией по критерию Сэвиджа является стратегия A_1.

4) *Обобщенный критерий пессимизма-оптимизма Гурвица* относительно выигрышей с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

Переставим выигрыши $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$ при каждой стратегии A_i (т.е. элементы каждой строки матрицы), расположив их в неубывающем порядке. Обозначим элементы полученной матрицы через b_{ij}, а саму матрицу как B:

$$B = \begin{pmatrix} j & \vline & 1 & 2 & \dots & n \\ \hline B_1 & \vline & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ B_2 & \vline & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \vline & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_m & \vline & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

где

$b_{i1} \le b_{i2} \le \dots \le b_{in}, \; i = \overline{1,m}.$

Например, матрица примет вид:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & 3 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

В силу неравенств в первом столбце матрицы B расположены минимальные выигрыши $b_{i1} = \min\limits_j b_{ij}$, а в последнем – максимальные $b_{in} = \max\limits_j b_{ij}$. Для некоторых номеров i и j возможны и равенства $b_{ij} = a_{ij}$.

Введем неотрицательные весовые коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, удовлетворяющие условию:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1.$$

Тогда показателем эффективности стратегии A_i по данному критерию будет число

$$G_i(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_{ij}, \; i = \overline{1,m},$$

А оптимальной стратегией будет та, при которой достигается максимум показателя эффективности.

Числа

$$\lambda_p = \sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \lambda_j \text{ и } \lambda_o = \sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} \lambda_j$$

называются соответственно показателями пессимизма и оптимизма. Здесь – целая часть числа $\dfrac{n}{2}$.

Весовые коэффициенты λ_i можно выбирать следующим образом: чем опаснее ситуация, тем больше желание подстраховаться, тем ближе к единице должен быть коэффициент пессимизма, в более безопасной ситуации ближе к единице должен быть коэффициент оптимизма. Процесс выбора весовых коэффициентов проводим следующим образом:

- определяем сумму выигрышей по столбцам матрицы B:

$$b_j = \sum_{i=1}^{m} b_{ij}, \;\; j = \overline{1,n},$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \\ \hline 6 & 11 & 16 & 23 \end{array}\right)$$

$b_1 = 6,\, b_2 = 11,\, b_3 = 16,\, b_4 = 23.$

- определяем среднее значение выигрышей по каждому столбцу
  $\overline{b_1} = \frac{6}{4} = 1{,}5,\; \overline{b_2} = \frac{11}{4} = 2{,}75,\; \overline{b_3} = \frac{16}{4} = 4,\; \overline{b_4} = \frac{23}{4} = 5{,}75.$
- Определяем общую сумму всех возможных выигрышей игрока *b*,
  $b = 56.$

Если игрок настроен пессимистично, , то весовые коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ выбираем обратно пропорционально средним выигрышам

$$\lambda_1 : \lambda_2 : .... : \lambda_n = \overline{b_n} : \overline{b_{n-1}} : ... : \overline{b_1},$$

или

$$\lambda_j = \frac{b_{n-j+1}}{b}.$$

- получим в данном случае
  $\lambda_1 = \frac{23}{56},\, \lambda_2 = \frac{16}{56},\, \lambda_3 = \frac{11}{56},\, \lambda_4 = \frac{6}{56}.$
- Вычисляем показатели эффективности стратегий A_i,

$$G_1 = \frac{23}{56}\cdot 1 + \frac{16}{56}\cdot 4 + \frac{11}{56}\cdot 5 + \frac{6}{56}\cdot 9 = \frac{196}{56},$$

$$G_2 = \frac{23}{56}\cdot 3 + \frac{16}{56}\cdot 3 + \frac{11}{56}\cdot 5 + \frac{6}{56}\cdot 8 = \frac{220}{56},$$

$$G_3 = \frac{23}{56}\cdot 2 + \frac{16}{56}\cdot 4 + \frac{11}{56}\cdot 6 + \frac{6}{56}\cdot 6 = \frac{212}{56}$$

Следовательно, оптимальной является стратегия A_2.

Если игрок настроен оптимистично, , то весовые коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ выбираем прямо пропорционально средним выигрышам

$$\lambda_1 : \lambda_2 : .... : \lambda_n = \overline{b_1} : \overline{b_2} : ... : \overline{b_n},$$

или

$$\lambda_j = \frac{b_j}{b}.$$

Получим $\lambda_1 = \frac{6}{56}, \lambda_2 = \frac{11}{56}, \lambda_3 = \frac{16}{56}, \lambda_4 = \frac{23}{56}.$

Тогда показатели эффективности будут равны:

$$G_1 = \frac{6}{56} \cdot 1 + \frac{11}{56} \cdot 4 + \frac{16}{56} \cdot 5 + \frac{23}{56} \cdot 9 = \frac{337}{56};$$

$$G_2 = \frac{6}{56} \cdot 3 + \frac{11}{56} \cdot 3 + \frac{16}{56} \cdot 5 + \frac{23}{56} \cdot 8 = \frac{315}{56};$$

$$G_3 = \frac{6}{56} \cdot 2 + \frac{11}{56} \cdot 4 + \frac{16}{56} \cdot 6 + \frac{23}{56} \cdot 6 = \frac{290}{56}.$$

и оптимальной будет стратегия A_1.

Задание 6

Руководство некоторой компании решает, создавать ли для выпуска новой продукции крупное производство, малое предприятие или продать патент другой фирме. Размер выигрыша, который компания может получить, зависит от благоприятного или неблагоприятного состояния рынка (табл. 1).

На основе данной таблицы выигрышей (потерь) можно построить дерево решений (рис.1).

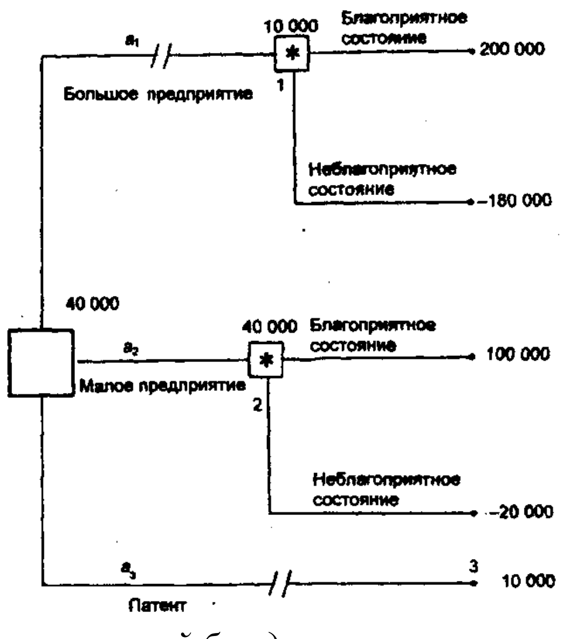


Рис. 1. Дерево решений без дополнительного обследования конъюнктуры рынка: □ - решение (решение принимает игрок): [*] - *случай (решение "принимает" случай); // - отвергнутое решение*

Таблица 1

Номер стратегии	Действия компании	Выигрыш, дол., при состоянии экономической среды*	
		благоприятном	неблаго-приятном
1	Строительство крупного предприятия (a_1)	200 000	-180 000
2	Строительство малого	100 000	-20 000

	предприятия (a_2)		
3	Продажа патента (a_3)	10 000	-10 000

• Вероятность благоприятного и неблагоприятного состояний экономической среды равна 0,5.

Процедура принятия решения заключается в вычислении для каждой вершины дерева (при движении справа налево) ожидаемых денежных оценок, отбрасывании неперспективных ветвей и выборе ветвей, которым соответствует максимальное значение средней ожидаемой денежной оценки выигрыша (*ОДО*).

Определим средний ожидаемый выигрыш (*ОДО*):

• для вершины 1 $ОДО_1$ = 0,5·200 000 + 0,5·(-180 000) = 10 000 дол.;

• для вершины 2 $ОДО_2$ = 0,5·100 000 + 0,5·(-20 000) = 40 000 дол.;

• для вершины 3 $ОДО_3$ = 10 000 дол.

Вывод. Наиболее целесообразно выбрать стратегию a_2, т.е. строить малое предприятие, а ветви (стратегии) a_1 и a_3 дерева решений можно отбросить. *ОДО* наилучшего решения равна 40 000 дол. Следует отметить, что наличие состояния с вероятностями 50 % неудачи и 50 % удачи на практике часто означает, что истинные вероятности игроку скорее всего неизвестны и он всего лишь принимает такую гипотезу (так называемое предположение «fifty - fifty» - пятьдесят на пятьдесят).

Усложним рассмотренную выше задачу.

Пусть перед тем, как принимать решение о строительстве, руководство компании должно определить, заказывать ли дополнительное исследование состояния рынка или нет, причем предоставляемая услуга обойдется компании в 10 000 дол. Руководство понимает, что дополнительное исследование по-прежнему не способно дать точной информации, но оно поможет уточнить ожидаемые оценки конъюнктуры рынка, изменив тем самым значения вероятностей.

Относительно фирмы, которой можно заказать прогноз, известно, что она способна уточнить значения вероятностей благоприятного или неблагоприятного исхода. Возможности фирмы в виде условных вероятностей благоприятности и неблагоприятности рынка сбыта представлены в табл. 2. Например, когда фирма утверждает, что рынок благоприятный, то с вероятностью 0,78 этот прогноз оправдывается (с вероятностью 0,22 могут возникнуть неблагоприятные условия), прогноз о неблагоприятности рынка оправдывается с вероятностью 0,73.

Таблица 2

Прогноз фирмы	Фактически	
	Благоприятный	Неблагоприятный
Благоприятный	0,78	0,22
Неблагоприятный	0,27	0,73

Предположим, что фирма, которой заказали прогноз состояния рынка, утверждает:

• ситуация будет благоприятной с вероятностью 0,45;

• ситуация будет неблагоприятной с вероятностью 0,55.

На основании дополнительных сведений можно построить новое дерево решений (рис. 2), где развитие событий происходит от корня дерева к исходам, а расчет прибыли выполняется от конечных состояний к начальным.

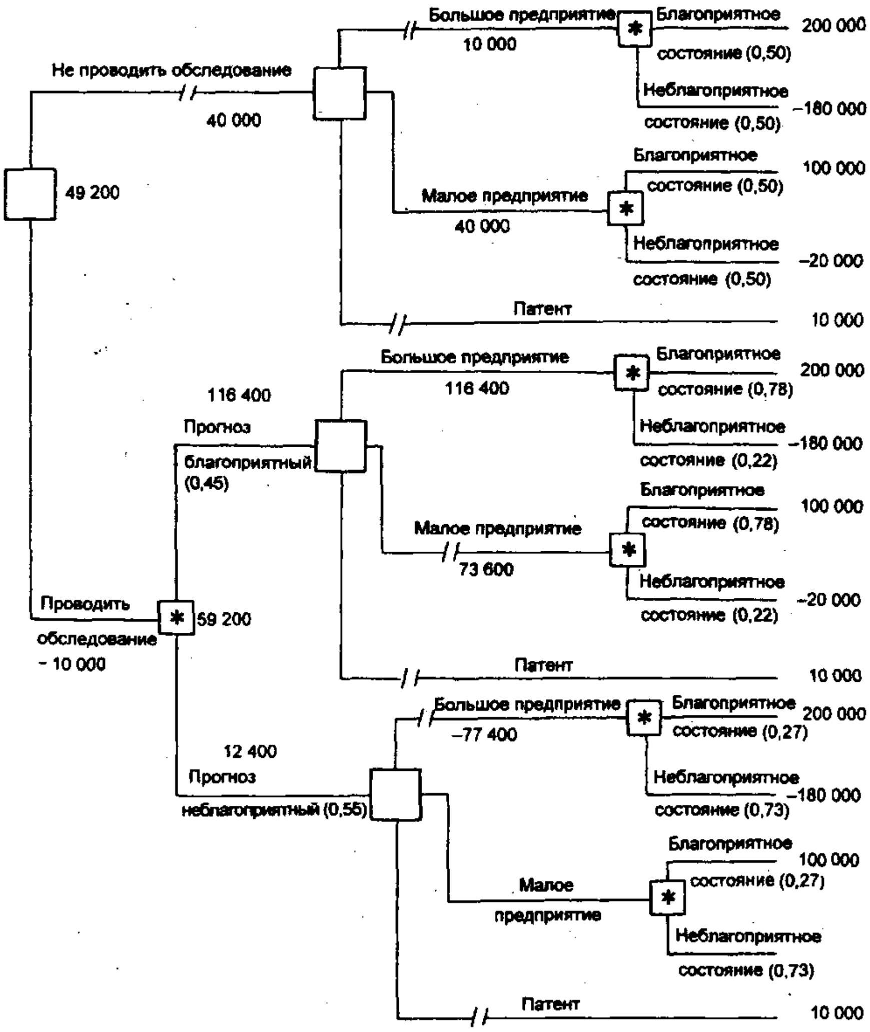


Рис. 2. Дерево решений при дополнительном обследовании рынка (см. условные обозначения к рис. 1)

Анализируя дерево решений, можно сделать следующие *выводы*:

• необходимо проводить дополнительное исследование конъюнктуры рынка, поскольку это позволяет существенно уточнить принимаемое решение;

• если фирма прогнозирует благоприятную ситуацию на рынке, то целесообразно строить большое предприятие (ожидаемая максимальная прибыль 116 400 дол.), если прогноз неблагоприятный - малое (ожидаемая максимальная прибыль 12 400 дол.).

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧИ

1. Составьте платежную матрицу игры Морра, если в ней участвуют два игрока, а максимально возможное количество «выбрасываемых» пальцев равно i (i=2,3,4,5,6,7,8,9,10). Выигрыш равен сумме пальцев выброшенных игроками. При четной сумме выигрывает первый игрок, при нечетной – второй.

2. Составьте платежную матрицу игры борьба за рынки, если фирма А имеет в своем распоряжение а условных денежных единиц, а противник - в. а=3,4,5,6,7,8,9,10; а соответствующие в=2,3,4,5,6,7,8,9.

3. Найдите седловую точку и максиминные стратегии игроков для следующих матричных игр:

3.1.

3	7	5
3	8	4
1	8	3
2	1	9

3.2.

3	6	1	8
3	4	4	9
6	8	5	9
7	2	3	5

3.3.

4	7	4	8	3
7	6	5	6	9
9	9	6	8	8
5	7	3	4	3
4	8	2	3	7

3.4.

5	9	7
5	10	6
3	10	5
4	3	11

3.5.

6	12	2	16
6	8	8	18
12	16	10	18
14	4	6	10

3.6.

7	13	3	17
7	9	9	19
15	17	11	19
15	5	7	11

3.7.

3	5	9
4	7	8
2	1	5

3.8.

3	5	6	4
4	8	4	3
6	8	5	5
2	7	4	2

3.9.

4	6
5	2
8	7
3	1

3.10.

1	3	8	4	2
8	5	5	9	11
8	3	6	7	2

4. Определите алгебраическим и геометрическим методами оптимальные решения следующих игр **2x2**:

1.

	B_1	B_2
A_1	5	2
A_2	-1	0

2.

	B_1	B_2
A_1	-3	-6
A_2	-4	-5

3.

	B_1	B_2
A_1	6	9
A_2	7	8

4.

	B_1	B_2
A_1	0	7
A_2	10	4

5.

	B_1	B_2
A_1	8	6
A_2	4	7

6.

	B_1	B_2
A_1	0	-1
A_2	-3	0

7.

	B_1	B_2
A_1	-10	-16
A_2	-12	-14

8.

	B_1	B_2
A_1	7	9
A_2	13	11

9.

	B_1	B_2
A_1	1	2
A_2	4	3

10.

	B_1	B_2
A_1	-3	-2
A_2	0	-2

11.

	B_1	B_2
A_1	0	2
A_2	3	1

12.

	B_1	B_2
A_1	-1	1
A_2	2	0

13.

	B_1	B_2
A_1	6	-2
A_2	-2	6

14.

	B_1	B_2
A_1	4	-5
A_2	-5	4

15.

	B_1	B_2
A_1	5	6
A_2	6	5

16.

	B_1	B_2
A_1	4	7
A_2	5	4

17.

	B_1	B_2
A_1	4	-5
A_2	-4	5

18.

	B_1	B_2
A_1	8	-1
A_2	1	9

19.

	B_1	B_2
A_1	6	9
A_2	13	11

20.

	B_1	B_2
A_1	1	-3
A_2	-8	5

21.

	B_1	B_2
A_1	4	-2
A_2	-3	5

22.

	B_1	B_2
A_1	5	8
A_2	7	6

23.

	B_1	B_2
A_1	6	9
A_2	8	7

24.

	B_1	B_2
A_1	2	5
A_2	3	4

25.

	B_1	B_2
A_1	0	-3
A_2	-1	0

26.

	B_1	B_2
A_1	12	3
A_2	9	7

27.

	B_1	B_2
A_1	4	-5
A_2	1	-1

5. Решить следующие матричные игры графическим методом:

1.

8	1	7
3	0	7

2.

-4	-8	-7	-3
-5	-9	-8	-4

3.

5	1	3
7	8	2

4.

6	13	19	25	19	15	16	18
19	25	19	18	16	12	13	15

5.

3	3	4	5
5	4	3	3

6.

0,4	0,5	1
1	0,5	0,3

7.

1	2	3
4	3	0

8.

11	8	12	1
-7	-1	-8	2

9.

10	-4	6	14	0
0	10	4	4	12

10.

2	-6	10	-14	18
-4	8	-12	16	-20

11.

3	7	-1	11	-5
6	2	10	-4	14

12.

9	-5	7	1	-3
-10	4	-8	-6	2

13.

24	0	18	21
9	18	9	3

14.

7	9	0
6	0	10

15.

-1	8	7	6	3	1
9	0	1	2	5	7

16.

1	3
5	7
9	11

17.

2	10
4	8
6	6
8	4
10	2

18.

-3	-9
-15	-21
-27	-33

19.

1	3
5	7
9	11

20.

-1	5
-3	1
0	-3
-3	0
1	-3
5	-1

21.

11	3
9	7
10	5
7	11
8	9

22.

2	2	3	-1
4	3	2	6

23.

4	8
4	6
6	4
-2	12

24.

1	3
1	4
2	1
-1	5

25.

2	4	-2	8
3	6	5	-5

26.

1	2
5	6
-7	9
-4	-3

27.

5	9
5	7
7	5
-1	13

2	1

28.

3	8	12
6	10	14

29.

0	8
2	6
4	4
6	2
8	0

30.

-2	10
-6	2
0	-6
-6	0
1	1
2	-6
10	-2

6. Решить следующие матричные игры с помощью симплекс-метода линейного программирования:

1.

2	4	6
6	2	2
2	6	2

2.

-7	4	2
0	2	1
6	-5	-1

3.

-5	6	4
2	4	3
8	-3	1

4.

1	3	2
3	1	3
2	3	1

5.

2	1	0
1	2	1
0	1	2

6.

4	6	1
4	4	1
1	1	6

7.

-4	-6	-1
-4	-4	-1
-1	-1	-6

8.

-2	-5	2
-1	1	-5
-2	-1	-2

9.

5	7	1
5	5	1
2	2	6

10.

2	6	4
6	2	6
4	6	2

11.

3	6	9
9	3	3
3	9	3

12.

0	1	2
2	0	0
0	2	1

7. Решить матричные игры приближенным методом:

1.

8	4	2
2	8	4
1	2	8

2.

-1	1	1
2	-2	2
3	3	-3

3.

1	2	-5	3	2
-1	4	7	2	-4
5	-1	1	1	3

4.

0	-13	-1
13	0	-13
1	13	0

5.

1	0	-1
0	2	1
1	-1	3

6.

3	2	4
4	3	2
2	4	3

7.

3	6	0
5	3	2
2	1	6

8.

3	0	7
4	6	0
3	4	3

9.

203	403	103
303	3	103
3	103	303

10.

2	-11	1
15	2	-11
3	15	2

11.

7	5	4
1	3	7
2	7	4

12.

16	0	14
6	6	16
6	12	2

13.

0	1	1
1	0	1
1	1	0

14.

-1	1	0
0	-1	1
1	0	-1

15.

0	2	1
2	0	2
1	2	0

18.

1	6	2	5
5	1	6	2

19.

6	0	1	2
0	3	1	0

20.

4	3	3	2	2	6
6	0	4	2	6	2

2	5	1	6

2	0	3	1

0	7	3	6	2	2

21.

0	-13	-3
13	0	-13
1	13	0

22.

9	6	12
12	9	6
6	12	9

23.

2	7	3	6
6	2	7	3
3	6	2	7

24.

12	0	2	4
0	6	2	0
4	0	6	2

25.

6	-10	4
-4	-4	6
-4	2	-8

26.

104	304	4
204	-96	4
-96	4	204

27.

3	1	4	1	6
6	3	1	4	1
1	6	3	1	4
4	1	6	3	1
1	4	1	6	3

28.

2	3	1	4
1	2	5	4
2	3	4	1
4	2	2	2

29.

-1	-2	-3
-3	-1	-1
-1	-3	1

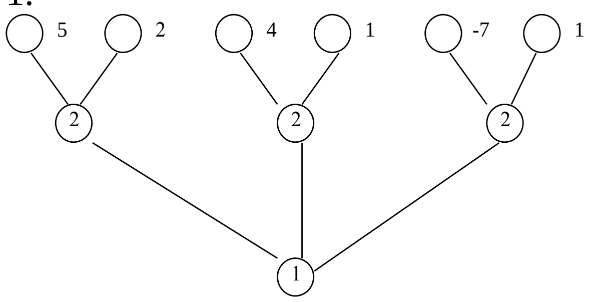
30.

1/7	2/7	3/7
3/7	1/7	1/7
1/7	3/7	1/7

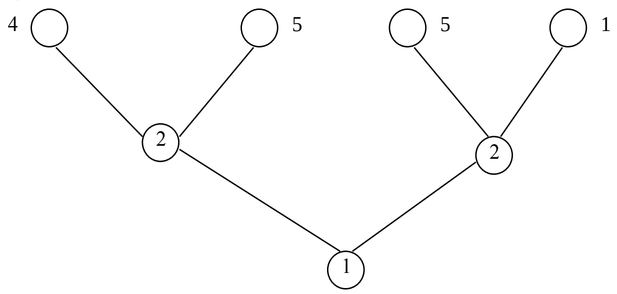
8. Произвести нормализацию позиционных игр, у которых дерево игры имеет вид, приведенный ниже. У конечных вершин поставлен выигрыш первого игрока, а выигрыш второго игрока противоположен по знаку.

Варианты:

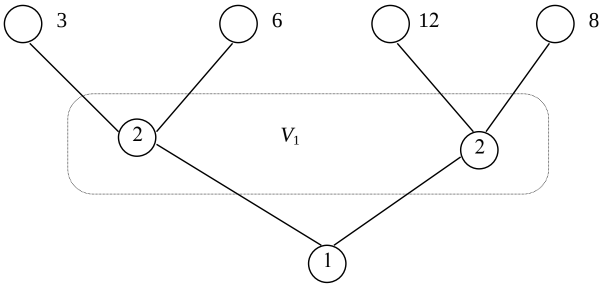
1.



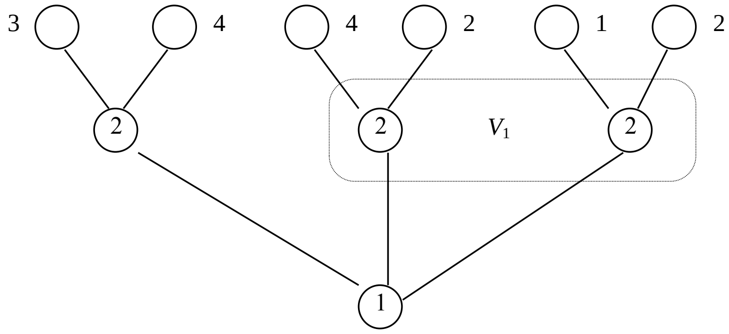
2.



3.



4.



2. Нарисовать дерево следующей позиционной игры «Выбор с правом вето», у которой N игроков выбирают одного кандидата из множества $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_i\}$, i< N. Правило голосования таково: начиная с игрока 1, каждый игрок последовательно налагает вето на выбор кандидатуры одного из не отведенных кандидатов. Единственный оставшийся кандидат считается избранным. Заданы также функции выигрыша u_1, u_2, …, u_N на множестве C, т.е. выигрыш каждого игрока в зависимости от того, какой кандидат победил. Найти решение, используя теорему Куна.

Варианты:

1. N =2; $C = \{c_1, c_2, c_3\}$
   u_1={2,-5,4}; u_2={-2,5,-4}
2. N =2; $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$
   u_1={2,5,-4,-3,1}; u_2={-2-3,4,3,-1}
3. N =3; $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$
   u_1={1,2,-3,4}; u_2={3,2,1,-5}; u_3={-2,-3,-1,8}.
4. N =4; $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$
   u_1={1,2,-2,-3,4}; u_2={3,5,1,-7,6}; u_3={2,4,-5,-1,1}; u_4={2,3,4,1,6}.

9. Найти хотя бы одно решение бесконечной антагонистической игры на единичном квадрате со следующей функцией выигрыша:

1. $H(x, y) = 16y^2 - 3xy + x^2$;

2. $H(x,y)=\begin{cases} x, & x\le \frac{y}{2};\\ y-x, & \frac{y}{2}\le x\le y;\\ x-y, & y\le x.\end{cases}$

3. $H(x,y)=\begin{cases} x, & x\le \frac{y}{2};\\ y-x, & \frac{y}{2}\le x\le y;\\ x-y, & y\le x\le \frac{y}{2}+\frac{1}{2};\\ 1-x, & \frac{y}{2}+\frac{1}{2}\le x.\end{cases}$

4. $H(x,y)=\sin\left[\dfrac{\pi(x+y)}{2}\right].$

5. $H(x,y)=\begin{cases} 2x-y, & x>y;\\ 0, & x=y;\\ x-2y, & x<y.\end{cases}$

6. $H(x,y)=\max\left\{\dfrac{x}{y};\dfrac{1-x}{1-y}\right\}.$

10.

I. Найти ситуации оптимальные по Парето и ситуации устойчивые по Нэшу для следующих биматричных игр:

1. $A=\begin{vmatrix}-7 & 1\\ -9 & 0\end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix}-7 & -9\\ 1 & 0\end{vmatrix}$,

2. $A=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}$,

3. $A=\begin{vmatrix}0 & 17\\ -3 & -7\end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix}0 & -2\\ 8 & 7\end{vmatrix}$,

4. $A=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 3 & 0\end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix}3 & 3\\ 0 & 0\end{vmatrix}$,

5. $A=\begin{vmatrix}0 & 24\\ 22 & -18\end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix}30 & 16\\ 18 & 22\end{vmatrix}$,

6. $A=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}$,

7. $A=\begin{vmatrix}12 & 0\\ 6 & 3\end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 6 & 12\end{vmatrix}$,

8. $A=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & -1\end{vmatrix}$.

II. Решить бескоалиционную игру “Экологический конфликт”.

<u>*Формулировка игры*</u>. Два промышленных предприятия (А и В), расположенные вблизи обширного водоема, берут из него воду для технических нужд и после использования сбрасывают ее обратно в водоем. Если суммарный объем сбрасываемой (загрязненной) воды не превышает некоторого предела δ, то происходит ее естественное очищение, и общий водный ресурс сохраняется. Если же указанный предел нарушен, то загрязненность водоема интенсивно растет. Возникает проблема его восстановления за счет предприятий и уплаты штрафов, общая стоимость чего составляет Θ.

Чтобы избежать неприятных последствий, приходится строить очистные сооружения, состоящие из отдельных стандартных блоков, рассчитанных на определенные объемы пропускаемой через них воды (пусть каждый блок восстанавливает 25% используемой воды). Затраты на приобретение, монтаж и эксплуатацию одного блока равны С.

Суть конфликта, возникающего между предприятиями, сводится к их стремлению обеспечить себе благоприятные условия деятельности путем более свободного расходования природной воды. Это отрицательно влияем на состояние источника и через него – на ход производства, качество продукции обоих предприятий. Все оказывается взаимосвязанным, и появляется заинтересованность в поиске решений, приемлемых для конфликтующих сторон, хотя никакой договоренности между ними не предусматривается.

<u>*Математическая модель*</u>. Данный конфликт можно представить как бескоалиционную игру двух лиц следующим образом.

Пусть количество воды, потребляемой каждым предприятием в его технологическом цикле равно единице (100 т, 10 цистерн, и т.д.). Количество очищаемой воды составляет $1 - x$ на предприятии А; $1 - y$ на предприятии В, где чистые стратегии игрока А = |0; 0,25; 0,5; 0,75; 1|, в зависимости от числа применяемых очистных блоков. Чистые стратегии игрока В = |0; 0,25; 0,5; 0,75; 1|.

Расходы предприятия А составляют:

$4C(1 - x)$, если $x + y \le \delta$;

$4C(1 - x) + \Theta$, если $x + y > \delta$,

а расходы предприятия В –

$4C(1 - y)$, если $x + y \le \delta$;

$4C(1 - y) + \Theta$, если $x + y > \delta$.

Данные формулы позволяют составить платежные матрицы игроков А и В. Для случая $\delta = \frac{1}{3}$ имеем

B A	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0
A_4	4C 4C	4C 3C	4C+Θ 2C+Θ	4C+Θ C+Θ	4C+Θ Θ
A_3	3C	3C+Θ	3C+Θ	3C+Θ	3C+Θ

	4C	3C+Θ	2C+Θ	C+Θ	Θ
A_2	2C+Θ 4C+Θ	2C+Θ 3C+Θ	2C+Θ 2C+Θ	2C+Θ C+Θ	2C+Θ Θ
A_1	C+Θ 4C+Θ	C+Θ 3C+Θ	C+Θ 2C+Θ	C+Θ C+Θ	C+Θ Θ
A_0	Θ 4C+Θ	Θ 3C+Θ	Θ 2C+Θ	Θ C+Θ	Θ Θ

Индекс при чистых стратегиях игроков указывает на количество используемых очистных блоков (например A_3 – предприятие А использует 3 очистных блока; B_0 – предприятие В не использует ни одного очистного блока).

Найти ситуации оптимальные по Парето и ситуации равновесия по Нэшу при следующих исходных данных:

9. C >> Θ; 10. C << Θ;

11. 5C = Θ; 12. 5C = Θ; $\delta = \frac{1}{2}$;

13. 4C = Θ; $\delta = \frac{1}{2}$; 14. 2C = Θ; $\delta = \frac{1}{2}$;

15. 2C = Θ; $\delta = \frac{1}{3}$; 16. C = 3Θ; $\delta = \frac{1}{3}$;

17. C = 2Θ; $\delta = \frac{1}{3}$; 18. C = Θ; $\delta = \frac{1}{3}$;

19. C = Θ; $\delta = \frac{1}{2}$; 20. C = 4Θ; $\delta = \frac{1}{3}$.

III. Найти множества всех ситуаций оптимальных по Парето в следующих биматричных играх:

21. $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix}$.

22. $A = \begin{vmatrix} 3 & 8 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

23. $A = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

24. $A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

25. $A = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 14 & 16 \end{vmatrix}$.

26. $A=\begin{vmatrix}7 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 4\\ 8 & 1 & 1\end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix}7 & 1 & 8\\ 1 & 5 & 1\\ 3 & 4 & 1\end{vmatrix}$.

27. $A=\begin{vmatrix}2 & 7 & -2\\ 3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix}0 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 7\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}$.

28. $A=\begin{vmatrix}3 & 4 & 7 & 8\\ 9 & 5 & 6 & 3\\ 4 & 5 & 2 & 9\\ 8 & 7 & 1 & 4\end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix}6 & 7 & 8 & 9\\ 3 & 5 & 10 & 1\\ 9 & 2 & 4 & 7\\ 2 & 8 & 6 & 3\end{vmatrix}$.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»

УТВЕРЖДАЮ
Руководитель направления подготовки
38.03.01 «Экономика»
код и наименование направления подготовки
_______________ / Резник С.Д. /
«28» сентября 2017 г.

Е.И. Куимова

Теория игр

Методические указания к самостоятельной работе студентов
(направление подготовки 38.03.01 – Экономика)

Пенза 2017

УДК
ББК
Г

Рецензент: д.т.н., профессор И.А.Гарькина
(кафедра МиММ, ПГУАС)

Куимова Е.И. Теория игр: Методические указания к самостоятельной работе студентов (направление подготовки 38.03.01 – Экономика) / Е.И. Куимова. – Пенза: ПГУАС, 2017. – с.

Даются организационно-методические основы выполнения студентами самостоятельной работы по дисциплине «Теория игр», исходя из требований к формированию компетенций, предусмотренных ФОС по направлению подготовки бакалавров 38.03.01 – Экономика.

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Теория игр» относится к вариативной части ООП (**Б1.В.ОД.5).**

Процесс изучения дисциплины (модуля) направлен на формирование следующих компетенций, **ОК-7 (**способность к самоорганизации и самообразованию), **ОПК-1** (способность решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности).

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

знать – знать определения и свойства основных понятий, моделей и методов, рассмотренных в курсе;
уметь – уметь применять их при анализе предлагаемых учебных и упрощённых реальных ситуаций;
владеть

– навыками применения современного математического инструментария теории игр для решения экономических задач;

– методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов (в части компетенций, соответствующих методам теории игр.

Методические рекомендации

Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов (СРС) способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений.

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов). Играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Государственным стандартом предусматривается, как правило, 50% часов из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу студентов. В связи с этим, обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

К современному специалисту общество предъявляет достаточно широкий перечень требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в практических занятиях, выполнение контрольных заданий и тестов, подготовку рефератов, докладов, статей.

Выделяются два вида самостоятельной работы – аудиторная (выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию) и внеаудиторная (выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия). Самостоятельная работа студентов без участия преподавателей включает:

- усвоение содержания конспекта лекций на базе рекомендованной лектором учебной литературы, включая информационные образовательные ресурсы;
- написание рефератов, докладов, статей;
- выполнение домашних заданий в виде решения отдельных задач, проведения типовых расчетов, расчетно-графических и индивидуальных работ по отдельным разделам дисциплины и т.д.;
- текущий самоконтроль и контроль успеваемости на базе электронных обучающих и аттестующих тестов.

Этапы внеаудиторной самостоятельной работы
1 этап

Усвоение содержания конспекта лекций на базе рекомендованной лектором учебной литературы, включая информационные образовательные ресурсы.

1. *Красс, М. С.* Математика в экономике: математические методы и модели : учебник для бакалавров / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов ; под ред. М. С. Красса. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 541 с.

2. *Фомин, Г. П.* Экономико-математические методы и модели в коммерческой деятельности : учебник для бакалавров / Г. П. Фомин. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

3. *Гармаш, А. Н.* Экономико-математические методы и прикладные модели : учебник для бакалавриата и магистратуры / А. Н. Гармаш, И. В. Орлова, В. В. Федосеев. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. –328 с.

4. *Попов, А. М.* Экономико-математические методы и модели : учебник для прикладного бакалавриата / А. М. Попов, В. Н. Сотников ; под общ. ред. А. М. Попова. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

5. *Дубина, И. Н.* Основы математического моделирования социально-экономических процессов : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / И. Н. Дубина. — М. : Издательство Юрайт, 2017.
6. *Королев, А. В.* Экономико-математические методы и моделирование : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / А. В. Королев. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 280 с.
7. *Смагин, Б. И.* Экономико-математические методы : учебник для академического бакалавриата / Б. И. Смагин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 272 с.
8. Гусева, Е.Н. Экономико-математическое моделирование. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — М. : ФЛИНТА, 2016. — 216 с.
9. *Конюховский, П. В.* Теория игр + CD : учебник для академического бакалавриата / П. В. Конюховский, А. С. Малова. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 252 с.
10. *Челноков, А. Ю.* Теория игр : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / А. Ю. Челноков. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 223 с.
11. *Шагин, В. Л.* Теория игр : учебник и практикум / В. Л. Шагин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 223 с.
12. *Шиловская, Н. А.* Теория игр : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / Н. А. Шиловская. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

Электронные библиотечные системы
1. Университетская библиотека онлайн http://biblioclub.ru/
2. Издательство «ИВИС» http://ebiblioteka.ru/
3. Научная электронная библиотека http://elibrary.ru/
4. Электронная библиотека диссертаций РГБ http://diss.rsl.ru/

Электронные информационные справочные системы
1. www.exponenta.ru;
2. www.shool.edu.ru;
3. http:/e-lib.uspu.ru
4. biblioclub.ru – «Университетская библиотека онлайн»

5. ebiblioteka.ru – издательство «ИВИС»
6. elibrary.ru – научная электронная библиотека

2 этап

Написание рефератов, докладов, статей

Примерные темы рефератов и научно-исследовательской работы студентов по разделам дисциплины «Теория игр»

1

№ пп	Модули, разделы, темы лекционного курса	Содержание
1.	**Антагонистические игры**	Стратегии игроков. Составление платежной матрицы (матрицы выигрышей). Седловая точка. Смешанные стратегии и цена игры. Методы решения частных классов антагонистических игр.
2.	**Биматричные игры**	Игры двух лиц с ненулевой суммой. Ситуации равновесия. Равновесие по Нэшу.
3.	**Коалиционные игры**	Наличие противоречия между выгодностью и устойчивостью. Арбитражное решение Нэша.
4.	**Игры с природой**	Игры с неполной информацией и игры с природой. Критерии рационального выбора в играх с природой.
5.	**Позиционные игры**	Позиционные игры как процесс последовательного принятия решений . Позиционные игры с полной информацией и с неполной информацией Дерево игры. Информационное множество. Графическое представление позиционной игры.

Этап 3

Выполнение домашних заданий в виде решения отдельных задач, проведения типовых расчетов, расчетно-графических и индивидуальных работ по отдельным разделам дисциплины и т.д.

Тема: Матричная игра 2×2.

Вариант 1

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 2

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 3

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 4

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 5

$$\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 6

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 7

Вариант 8

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант 9

$\begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 14 & 4 \end{pmatrix}$

Вариант 10

$\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

Тема: Матричная игра $2\times n$ *и* $n\times 2$.

Вариант 1

1) $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}9 & 1{,}1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 6 \\ 4 & 5 \\ 9 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант 2

1) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Вариант 3

1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Вариант 4

1) $\begin{pmatrix} 1{,}1 & 0{,}6 & 0{,}8 & 1 & 0{,}4 \\ 1{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 7 \\ 2 & -8 \\ -1 & 4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

Вариант 5

1) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \\ 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Вариант 6

1) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \\ 4 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

Вариант 7

1) $\begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \\ 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Вариант 8

1) $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \\ 2 & -8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

Вариант 9

1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 5 \\ 7 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 4 \\ 4 & 8 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

Вариант 10

1) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 5 & 4 \\ 4 & 8 \\ 7 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

*Тема: Решение задач теории игр методами линейного программирования **(симплекс-методом)***

Вариант 1

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Вариант 2

$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

Вариант 3

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

Вариант 4

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

Вариант 5

Вариант 6

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Вариант 7

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & 8 & 1 \\ 6 & -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Вариант 8

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Вариант 9

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 10

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Тема: Биматричная игра 2×2.

Вариант 1

A	4	2
	1	6
B	5	-2
	-1	1

Вариант 2

A	6	0
	3	4
B	7	-3
	-4	5

Вариант 3

A	8	-2
	1	3
B	9	-4
	-7	9

Вариант 4

A	6	3
	-1	8
B	6	-3
	-4	5

Вариант 5

A	8	1
	-2	6
B	8	-4
	-7	9

Вариант 6

A	10	-1
	9	4
B	10	-5
	-10	13

Вариант 7

A	8	4
	3	9
B	7	-4
	-7	9

Вариант 8

A	10	2
	4	7
B	9	-5
	-10	13

Вариант 9

A	12	0
	-3	5
B	11	-6
	-13	17

Вариант 10

A	10	5
	4	10

B	8	-5
	-10	13

Тема: Коалиционные игры

Вариант 1

	2	-1	3
A	3	0	4
	1	5	0

	0	1	2
B	4	-5	0
	1	1	4

Вариант 2

	3	0	-2
A	4	6	1
	0	1	1

	1	2	3
B	0	4	-1
	-3	0	5

Вариант 3

	2	4	0
A	3	1	1
	6	3	5

	0	2	4
B	1	3	3
	2	0	-1

Вариант 4

	1	4	-2
A	3	6	0
	1	1	5

	0	1	1
B	2	3	0
	1	4	-1

Вариант 5

	2	0	-2
A	1	4	3
	0	1	1

	1	-1	0
B	2	3	-2
	1	4	5

Вариант 6

	1	2	0
A	3	4	-1
	0	5	1

	4	0	1
B	3	2	-1
	5	0	2

Вариант 7

	3	4	0
A	2	2	1
	1	0	5

	1	1	4
B	2	0	3
	3	1	-2

Вариант 8

	1	2	2
A	3	-1	0
	4	0	5

	1	1	-5
B	2	3	0
	0	1	2

Вариант 9

	4	-1	0
A	3	1	1
	3	4	2

	1	-5	0
B	0	2	1
	1	3	0

Вариант 10

	1	4	6
A	2	2	0
	3	2	4

	1	1	0
B	3	0	2
	2	2	-4

Тема: Игры с природой. Типовые задачи.

Вариант 1

Вариант 2

2	0	3	7	2	4	8	7
0	2	5	0	2	7	5	3
10	10	10	3	1	8	3	3
4	8	7	3	2	10	9	3
9	8	9	3	7	10	4	3

Вариант 3

2	7	10	8
7	6	3	9
10	4	8	8
0	9	7	3
6	9	6	0

Вариант 4

6	6	10	1
10	4	0	10
3	7	0	4
7	10	4	5
5	0	10	6

Вариант 5

5	4	9	7
3	6	4	4
7	1	10	3
2	10	0	10
9	8	3	4

Вариант 6

9	10	4	6
1	10	8	10
1	4	4	1
6	5	5	3
10	5	10	7

Вариант 7

2	9	8	4
4	6	3	2
9	3	2	1
4	3	1	5
10	7	0	9

Вариант 8

10	3	8	9
7	2	7	7
0	6	1	4
6	0	10	4
7	10	7	1

Вариант 9

1	2	1	9
6	5	4	0
2	9	9	10
6	6	3	2
3	6	1	5

Вариант 10

6	7	6	5
0	0	9	10
1	8	3	0
5	1	7	9
3	9	10	5

Тема: Игры с природой. Творческие задачи.

Задание 1

Установленное на предприятии сложное и дорогое оборудование после k лет работы может оказаться в одном из трех состояний: Q_1 - оборудование вполне работоспособно и требует лишь небольшого текущего ремонта; Q_2 - некоторые детали значительно износились и требуют серьезного ремонта или замены; Q_3 - основные детали износились настолько, что дальнейшая эксплуатация оборудования невозможна. Прошлый опыт эксплуатации аналогичного оборудования показывает, что в 20% случаев оно может находиться в состоянии Q_1, в 50% случаев - в Q_2 и в 30% - в состоянии Q_3. Для предприятия возможны три различных способа действия: a_1 - оставить оборудование в работе еще на год, проведя незначительный ремонт своими силами: a_2 - провести капитальный ремонт оборудования с вызовом специальной бригады ремонтников; a_3 - заменить оборудование новым. Потери, которые несет предприятие при различных способах действия, сведены в таблицу. Выбрать оптимальный способ действия.

Таблица 2.9

	Q_1	Q_2	Q_3
a_1	1	5	7
a_2	3	2	6
a_3	5	4	3

Задание 2

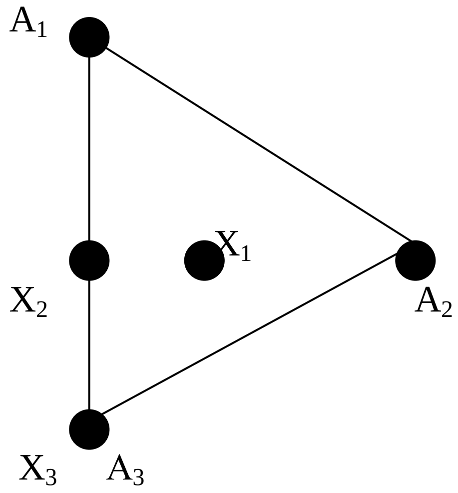
На технологическую линию может поступать сырье с малым Q_1 и большим Q_2 количеством примеси. Известно, что в среднем поступает 60% сырья первого вида и 40 % - второго вида. Для использования различных видов сырья предусмотрено три режима работы технологической линии: a_1, a_2 и a_3. Потери, отражающие качество выпускаемой продукции н расходы сырья в зависимости от качества сырья и режима работы технологической линии, приведены в таблице. Выбрать оптимальный режим работы линии.

Таблица 2.10

	Q_1	Q_2
a_1	0	5
a_2	1	3
a_3	3	2

Задание 3

Склад имеет форму равностороннего треугольника с вершинами A_1, A_2, A_3. Грабитель может проникнуть на склад только в точках A_1, A_2, A_3, вероятности проникновения неизвестны. На территории склада нужно установить сторожевую вышку, чтобы обнаружить грабителя в момент проникновения на склад. Известно, что вероятность обнаружения грабителя пропорциональна расстоянию до него. Существуют 3 возможных места установки вышки : X_1, X_2, X_3. Составить матрицу вероятностей обнаружения (считать вероятности обнаружения между вершинами A_iA_j (i, j = 1, 2, 3) за 1) и выбрать оптимальное место установки вышки.



Задание 4

Проектируется система сооружений, защищающая сельскохозяйственные угодья от паводков. Прогнозируемость паводков очень мала. Можно предположить, что

$П_1$ - паводок отсутствует,

$П_2$ - малый паводок,

$П_3$ - средний паводок,

$П_4$ - большой паводок.

Предполагается построить дамбу. Существует четыре варианта:

a_1 - не строить,

a_2 - построить малую дамбу,

a_3 - построить среднюю дамбу,

a_4 - построить большую дамбу.

Требуется выбрать оптимальный вариант, если матрица потерь (затраты на строительство дамбы + убытки от паводка) имеет следующий вид:

Таблица 2.11

	$П_1$	**$П_2$**	**$П_3$**	**$П_4$**
a_1	0	17	23	30
a_2	7	16	19	26
a_3	14	14	17	23

a_4	20	20	20	20

Задание 5

Требуется организовать кэш-память для обмена с дисками в банковской системе. В то же время память требуется и для других процессов. Не кэшированное обращение к диску занимает в 3 раза больше времени, чем кэшированное. Определить оптимальный объем кэш-памяти, если матрица потерь (потери времени на обращение к диску или ожидание, секунд в минуту) имеет вид:

Таблица 2.12

	$П_1$	**$П_2$**	**$П_3$**	**$П_4$**
a_1	1	2	6	8
a_2	2	3	5	4
a_3	5	7	3	2
a_4	7	6	2	1

Используются следующие показатели:

$П_1$ - 10 обращений в минуту;

$П_2$ - 30 обращений в минуту;

$П_3$ - 60 обращений в минуту;

$П_4$ - 100 обращений в минуту;

a_1 - 128 Кб кэш-памяти;

a_2 - 256 Кб кэш-памяти;

a_3 - 512 Кб кэш-памяти;

a_4 - 1 Мб кэш-памяти.

Задание 6

Требуется спланировать закупки ядохимикатов для уничтожения вредителей так, чтобы остатки химикатов и количество не уничтоженных вредителей (а соответственно и потери от них) были минимальны.

Матрица потерь имеет следующий вид:

Таблица 2.13

	$П_1$	**$П_2$**	**$П_3$**	**$П_4$**
a_1	10	21	32	43
a_2	20	11	22	34

a_3	30	21	12	23
a_4	40	31	22	13

Используются следующие показатели:

$П_1$ - 1000 вредителей на 1 га;

$П_2$ - 2000 вредителей на 1 га;

$П_3$ - 3000 вредителей на 1 га;

$П_4$ - 4000 вредителей на 1 га;

a_1 - 1 т ядохимикатов;

a_2 - 2 т ядохимикатов;

a_3 - 3 т ядохимикатов;

a_4 - 4 т ядохимикатов.

Задание 7

Один из N станков должен быть выбран для изготовления партии изделий, которая может принимать любое из четырех значений (100, 200, 300 и 400 деталей). Производительные затраты L_{ij} для станка i задаются формулой $L_{ij} = K_i + C_i Q_j$, где Q_j - размеры партии изделий, а значения K_i,C_i даны в таблице. Составить матрицу потерь и произвести выбор станка.

Таблица 2.14

Станок	K_i	C_i
1	1000	5
2	400	10
3	1500	3
4	900	8

Задание 8

Планируется строительство поселка в сейсмоопасном районе. Землетрясения возможны любой силы Q_j (5 - 9 баллов по шкале Рихтера). Требуется выбрать типовой проект здания A_i для поселка, если матрица потерь имеет вид (в матрицу занесены стоимость постройки здания плюс стоимость восстановления здания после землетрясения):

Таблица 2.15

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4

A_1	3	5	7	10
A_2	4	4	7	9
A_3	6	6	6	9
A_4	8	8	8	8

Задание 8

Диагноз острого холецистита является установленным, однако морфологическая его форма неизвестна хирургу, а также имеет место ишемия миокарда, о характере которой судить трудно. Аналогичная ситуация возникает у больных с субкомпенсированной сердечно-сосудистой недостаточностью или иной сопутствующей патологией, функциональный или органический характер которой установить на фоне острого приступа холецистита зачастую невозможно. Срочное вмешательство может привести у них к тяжелому срыву, а консервативное лечение к компенсированному состоянию, когда операция станет относительно менее опасной.

Состояния природы могут быть сформулированы следующим образом:

S_1 - катаральный холецистит,

S_2 - флегмозный холецистит,

S_3 - гангренозный, перфоративный холецистит;

S_1, S_2, S_3 - в сочетании с рефлекторной ишемией или субкомпенсированной, преимущественно функциональной, сердечно-сосудистой патологией.

S_4 - катаральный холецистит,

S_5 - флегмозный холецистит,

S_6 - гангренозный, перфоративный холецистит;

S_4, S_5, S_6 - в сочетании с инфарктом миокарда или органической сердечно-сосудистой патологией на грани стойкой декомпенсации.

Стратегии хирурга:

A_1 - срочная операция с кратковременной подготовкой (4-6 ч);

A_2 - ранняя (в первые сутки) или отсроченная (2-3 суток) операция после предварительной подготовки;

A_3 - консервативное лечение либо отказ от оперативного вмешательства при стихании процесса и наличии противопоказаний. Произвести выбор, если матрица потерь (в матрице потери обозначают процент летального исхода) имеет следующий вид:

Таблица 2.16

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
A_1	5%	10%	15%	30%	35%	40%
A_2	3%	8%	25%	20%	25%	45%
A_3	1%	25%	40%	0%	40%	60%

Задание 10

Действия врача при диагнозе “острый живот”:

A_1 - срочное оперативное вмешательство;

A_2 - отказ от срочной операции с последующим принятием нового решения.

Состояния природы:

S_1 - острое заболевание органов брюшной полости, при котором показана срочная операция;

S_2 - острое заболевание, при котором может оказаться более выгодной отсроченная операция после подготовки;

S_3 - острое заболевание органов брюшной полости или иной локализации симулирующее S_1 или S_2, при котором вмешательство окажется напрасным;

S_4 - острое заболевание, симулирующее S_1 или S_2, при котором операция противопоказана.

Произвести выбор, если матрица выигрышей имеет вид:

Таблица 2.17

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	1-d	1-n	1-t	1-r
A_2	1-q	1-m	0.99	1

Здесь

d, n, t, r, q, m - вероятность летального исхода.

$q> d$, $n>m$, $t>\{m, l, r\}$

$0<\{d, m, n, r, q, t\}<1$

Известны также вероятности p состояний природы S_i.

Числовые примеры:

1) $d=0.2$; $n=0.5$; $t=0.10$; $r=0.15$; $q=0.6$; $m=0.4$; $p_1=0.2$; $p_2=0.4$; $p_3=0.25$; $p_4=0.15$.

2) $d=0.1$; $n=0.9$; $t=0.2$; $r=0.7$; $q=0.2$; $m=0.55$; $p_1=0.25$; $p_2=0.5$; $p_3=0.17$; $p_4=0.12$.

Задание 11

Массовая травма: закрытая травма груди.

Массовые травмы - это травмы, полученные в результате несчастного случая, когда перед врачами возникает вопрос определения очередности эвакуации.

Состояния природы:

S_1 - курабелен;

S_2 - инкурабелен;

S_3 - не нуждается в хирургической помощи при легком поражении.

Стратегия медслужбы - выбор очередности эвакуации:

A_1 - эвакуация первой очереди (до 20 мин. после аварии);

A_2 - эвакуация второй очереди (до одного часа после аварии);

A_3 - эвакуация после длительного времени.

Произвести выбор, если матрица выигрышей (выигрыш - процент шансов спасти жизнь пострадавшего если он своевременно эвакуирован) имеет вид:

Таблица 2.18

	S_1	S_2	S_3
A_1	80%	40%	90%
A_2	65%	30%	85%
A_3	50%	10%	80%

Известны вероятности состояний природы. Числовые примеры вероятностей найти живых пострадавших даны в таблице.

Таблица 2.19

$p(S_1)$	0.25	0.90	0.75	0.20
$p(S_2)$	0.65	0.01	0.08	0.65
$p(S_3)$	0.10	0.09	0.17	0.15

Задание 12

Желтая лихорадка, гепатит *Б* или что-то другое?

Желтая лихорадка очень распространенная болезнь в Африке. Ее лечение приводит к максимизации желаемого результата (выздоровление больного), только если оно начинается в ранней стадии болезни. Но врач не в состоянии это сделать поскольку ее симптомы точно совпадают с симптомами другой опасной болезни (даже в мировом масштабе), вирус которой действует как вирус СПИДа, но, к счастью, ее можно лечить, если обнаружить в ранней стадии. Вопрос в том, что поскольку симптомы одинаковы и лечение следует начинать при появлении первых симптомов, врачи часто оказываются перед выбором, какие лекарства против каких болезней следует назначить? На прием приходит больной с симптомами болезни, которая может развиваться по трем направлениям, представляющим собой предполагаемые состояния природы:

S_1 - желтая лихорадка;

S_2 - гепатит Б;

S_3 - другая болезнь.

Врач имеет три возможных пути выхода из положения:

A_1 - начинать лечение желтой лихорадки;

A_2 - начинать лечение гепатита Б;

A_3 - продолжать наблюдение.

Произвести выбор, если дана следующая матрица выигрышей (выигрыш - процент выздоровления):

Таблица 2.20

	S_1	**S_2**	**S_3**
A_1	90%	40%	20%
A_2	50%	60%	25%
A_3	45%	50%	80%

Известны вероятности состояний природы. Числовые примеры для вероятности состояния даны в таблице.

Таблица 2.21

$p(S_1)$	0.60	0.10	0.75
$p(S_2)$	0.26	0.56	0.17
$p(S_3)$	0.14	0.34	0.08

Глоссарий

В зависимости от количества игроков различают игры двух и *n* игроков. Первые из них наиболее изучены. Игры трёх и более игроков менее исследованы из-за возникающих принципиальных трудностей и технических возможностей получения решения. Чем больше игроков – тем больше проблем.

По количеству стратегий игры делятся на конечные и бесконечные. Если в игре все игроки имеют конечное число возможных стратегий, то она называется конечной. Если же хотя бы один из игроков имеет бесконечное количество возможных стратегий, игра называется бесконечной.

По характеру взаимодействия игры делятся на:

- Бескоалиционные: игроки не имеют права вступать в соглашения, образовывать коалиции.
- Коалиционные (кооперативные) – игроки могут вступать в коалиции.

В кооперативных играх коалиции наперёд определены.

По характеру выигрышей игры делятся на:

- Игры с нулевой суммой (общий капитал всех игроков не меняется, а перераспределяется между игроками; сумма выигрыша всех игроков равна нулю).
- Игры с ненулевой суммой.

По виду функций выигрыша игры делятся на:

- Матричные.
- Биматричные.
- Непрерывные.
- Выпуклые и т. д.

Матричная игра – это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаётся выигрыш игрока 1 в виде матрицы (строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии игрока 1, столбец – номеру применяемой стратегии игрока 2; на пересечении строки и столбца находится выигрыш игрока 1, соответствующий применяемым стратегиям).

Для матричных игр доказано, что любая из них имеет решение, и оно может быть найдено путём сведения игры к задаче линейного программирования.

Биматричная игра – это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока задаются матрицами отдельно для соответствующего игрока (в каждой матрице строка соответствует стратегии игрока 1, столбец – стратегии игрока 2, на пересечении строки и столбца в первой матрице находится выигрыш игрока 1, во второй – выигрыш игрока 2).

Для биматричных игр также разработана теория оптимального поведения игроков, однако, решать такие игры сложнее, чем обычные матричные.

Непрерывной считается игра, в которой функция выигрышей каждого игрока является непрерывной в зависимости от стратегий. Доказано, что игры этого класса имеют решения, однако, не разработано практически приемлемых методов их нахождения.

Если функция выигрышей является выпуклой, то такая игра называется выпуклой. Для них разработаны приемлемые методы решения, состоящие в отыскивании чистой оптимальной стратегии (определённого числа) для одного игрока и вероятностей применения чистых стратегий другого игрока. Такая задача решается сравнительно легко.

Стратегия игрока – совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом ходе в зависимости от сложившейся ситуации.

Оптимальная стратегия игрока – такая стратегия, которая обеспечивает ему наилучшее положение в данной игре, т. е. максимальный выигрыш.

***Абсолютно неэффективный дележ* –** ситуация, в которой распределение результатов коалиционного поведения не приемлемо ни для какой коалиции.

Аксиома оптимальности по Парето - арбитражное решение должно быть элементом переговорного множества.

Аксиома симметрии в теории игр - если игроки находятся в одинаковой ситуации, то и арбитражное решение должно быть одинаковым.

Антагонистическая игра - игра двух игроков, интересы которых строго противоположны, т. е. выигрыш одного игрока равен проигрышу другого.

Арбитраж - нахождение совместной стратегии с помощью незаинтересованного лица.

Бесконалиционная игра - в которой целью каждого игрока является получение, по возможности, большего индивидуального выигрыша.

***Вектор Шепли* -** вектор распределения общего выигрыша между участниками игры.

Выигрыш- игровая ситуацию, в которой игроком достигнута цель при наличии остатка ресурсов.

Выпуклое множество - множество, которое вместе с двумя принадлежащими ему точками обязательно содержит отрезок, соединяющий эти точки.

Выпуклая оболочка - это выпуклый многоугольник, вершинами которого являются несколько данных точек.

Игра – модель конфликта, в котором участвуют две и более сторон, ведущих борьбу за реализацию своих интересов. Каждая из сторон имеет свою цель и использует собственную стратегию, разработанную с учетом представлений этой стороны о других участниках, их ресурсах и их возможных стратегиях.

Игра комбинаторная - правила дают в принципе возможность каждому игроку проанализировать все разнообразные варианты своего поведения и, сравнив эти варианты, избрать тот из них, который ведет к наилучшему для этого игрока исходу. Неопределенность исхода связана обычно с тем, что количество возможных вариантов поведения (ходов) слишком велико и практически игрок не в состоянии их всех перебрать и проанализировать;

Игра стратегическая – характеризуется неопределенностью исхода, вызванной тем, что каждый из игроков, принимая решение о выборе предстоящего хода, не знает, какой стратегии будут придерживаться другие участники игры, причем незнание игрока о поведении и намерениях партнеров носит принципиальный характер, так как отсутствует информация о последующих действиях противника (партнера).

Игра с нулевой суммой – общий капитал всех игроков не меняется, а распределяется между игроками; сумма выигрышей всех игроков рана нулю.

Игра с ненулевой суммой - игра, в которой сумма выигрышей игроков после каждой партии не равна нулю.

Игра n лиц с постоянной суммой - игры, в которых принимает участие n игроков, существует n множеств стратегий и n действительных платежных функций от n переменных, каждая из которых является элементом соответствующего множества стратегий.

Игра с природой- случай, когда неопределенность в игре вызвана не сознательным противодействием противника, а незнанием условий, в которых будет приниматься решение, случайных обстоятельств.

Игрок - отдельная совокупность интересов, отстаиваемая в игре. Если данную совокупность интересов отстаивает несколько участников игры, то они рассматриваются как один игрок. Игроки, имеющие противоположные по отношению друг к другу интересы, называются *противниками*.

Коалиция в кооперативной игре - любое подмножество множества игроков.

Конечная игра – в игре все игроки имеют конечное число возможных стратегий

Кооперативная игра – игра, в которой группы игроков — коалиции — могут объединять свои усилия для максимизации совокупного выигрыша. В *бескоалиционных играх* целью каждого игрока является получение, по возможности, большего индивидуального выигрыша.

Кооперативная игра двух лиц - игра двух лиц, в которой игроки имеют возможность вступать в переговоры.

Максиминная (осторожная) стратегия игрока - указывает, чего может добиться игрок в *наихудшей* для него ситуации и как он должен действовать, чтобы в этой наихудшей ситуации добиться минимального проигрыша (или максимального выигрыша).

Матрица рисков - *в которой на пересечении столбцов и строчек указываются значения риска реализации данной стратегии при данном состоянии рыночной конъюнктуры, рассчитанные по формуле* $R=Ymax-Y$

Матричная форма представления игры – *конечная игра двух игроков с нулевой суммой*, в которой задаётся выигрыш игрока *1* в виде матрицы (строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии игрока *2*, столбец – номеру применяемой стратегии игрока *2*; на пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш игрока *1*, соответствующий применяемым стратегиям).

Партия - период, в течение которого все делают по одному одновременному или последовательному *ходу*.

Платеж **-** промежуточные выигрыш (проигрыш) игрока в партии.

Правила – жесткий (чаще всего формализованный) перечень возможных действий игроков, определяющий «игровое пространство».

Проигрыш- ситуация, в которой ресурсы игрока истекли, а цель не достигнута.

Развёрнутая (позиционная) форма представления игры – протокол возможных последовательностей ходов игроков.

Решение игры **-** нахождение оптимальных стратегий игроков, т.е. приносящих максимальные платежи в ответ на действия других игроков или природы в каждой *партии*.

Решение игры в чистых стратегиях - игра имеет *седловой элемент*, т.е. оптимальное решение – это пара чистых стратегий, соответствующих этому элементу. Ситуацию (i,j)называют равновесной, если она приемлема для обоих игроков.

Седловой элемент игры – элемент платёжной матрицы A, являющийся одновременно минимальным в строке и макс

имальным в столбце, т.е. *нижняя* и *верхняя* цены игры совпадают.

Стратегия игрока - возможные действия, позволяющие игроку в каждой *партии* игры выбирать из определённого количества альтернативных вариантов такой ход, который представляется ему «лучшим ответом» на действия других игроков.

Стратегия игрока доминирующая – *стратегия*, которая даёт наибольший *выигрыш* для любого заданного поведения других игроков или состояния природы.

Стратегия игрока оптимальная - такая стратегия, которая при многократном повторении игры, содержащей личные и случайные ходы, обеспечивает игроку максимально возможный *средний* выигрыш (или, что то же самое, минимально возможный средний проигрыш).

Стратегия игрока смешанная - вероятностное распределение на множестве его чистых стратегий.

Теорема Неймана - *к*аждая конечная игра имеет по крайней мере одно оптимальное решение, возможно, среди смешанных стратегий.

Тривиальная игра – игра одного игрока.

***Устойчивость равновесия* в игре** – отклонение игрока от своей наиболее выгодной, максимизирующей стратегии может разве что уменьшить его выигрыш.

Ход – адекватные действия игрока в ответ на действия других игроков или состояние внешней среды, выбор одного из предусмотренных правилами игры действия и его реализация.

Ход случайный - выбор, осуществляемый не волевым решением игрока, а каким-либо механизмом случайного выбора

Цели игроков – формализованные интересы сторон.

Цена игры – значение выигрыша, выраженное в соответствующих единицах, перераспределяемого между игроками. *Нижняя чистая цена игры* показывает, какой минимальный выигрыш может гарантировать себе игрок *1*, применяя свои чистые стратегии при всевозможных действиях игрока 2. *Чистая верхняя цена игры* – максимальный проигрыш, который может гарантировать себе игрок *2*.

Эксцесс - "мера неудовлетворенности" коалиции дележом.

Список рекомендуемой литературы

1. *Красс, М. С.* Математика в экономике: математические методы и модели : учебник для бакалавров / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов ; под ред. М. С. Красса. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 541 с.

2. *Фомин, Г. П.* Экономико-математические методы и модели в коммерческой деятельности : учебник для бакалавров / Г. П. Фомин. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

3. *Гармаш, А. Н.* Экономико-математические методы и прикладные модели : учебник для бакалавриата и магистратуры / А. Н. Гармаш, И. В. Орлова, В. В. Федосеев. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. –328 с.

4. *Попов, А. М.* Экономико-математические методы и модели : учебник для прикладного бакалавриата / А. М. Попов, В. Н. Сотников ; под общ. ред. А. М. Попова. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

5. *Дубина, И. Н.* Основы математического моделирования социально-экономических процессов : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / И. Н. Дубина. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

6. *Королев, А. В.* Экономико-математические методы и моделирование : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / А. В. Королев. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 280 с.
7. *Смагин, Б. И.* Экономико-математические методы : учебник для академического бакалавриата / Б. И. Смагин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 272 с.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»

УТВЕРЖДАЮ
Руководитель направления подготовки
38.03.01 «Экономика»
код и наименование направления подготовки
__________ / Резник С.Д. /
«28» сентября 2017 г.

Е.И. Куимова

Теория игр

Методические указания по подготовке к зачету
(направление подготовки 38.03.01 – Экономика)

Пенза 2017

УДК
ББК
К

Рецензент: д.т.н., профессор И.А.Гарькина
(кафедра МиММ, ПГУАС)

К **Куимова Е.И**. Теория игр: Методические указания по подготовке к зачету (направление подготовки 38.03.01 – Экономика) / Е.И. Куимова. – Пенза: ПГУАС, 2017. – с.

Приводятся методики оценки знаний, исходя из требований к формированию компетенций, предусмотренных ФОС по направлению подготовки бакалавров 38.03.01 – Экономика.

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Теория игр» относится к вариативной части ООП (**Б1.В.ОД.5).**

Процесс изучения дисциплины (модуля) направлен на формирование следующих компетенций, **ОК-7 (**способность к самоорганизации и самообразованию), **ОПК-1** (способность решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности).

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

знать – знать определения и свойства основных понятий, моделей и методов, рассмотренных в курсе;
уметь – уметь применять их при анализе предлагаемых учебных и упрощённых реальных ситуаций;
владеть

– навыками применения современного математического инструментария ТИ для решения экономических задач;

– методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов (в части компетенций, соответствующих методам теории игр.

Методические рекомендации

Оценка качества освоения дисциплины включает текущий контроль успеваемости, промежуточную аттестацию обучающихся и итоговую государственную аттестацию выпускников.

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины проводится в форме *зачета.*

Зачет является формой проверки успешного выполнения студентами контрольных работ, домашних заданий, усвоения учебного материала на практических занятиях в соответствии с рабочей программой дисциплины. Зачет проводится в строгом соответствии с учебными планами. Форма проведения зачета (устная, письменная, тестирование, защита контрольной работы) устанавливается преподавателем. Информация о форме проведения зачета доводится до сведения студентов в начале семестра. Вопросы к зачету формулируются преподавателем только на основании и в объеме изученного программного материала.

Подготовка к зачету состоит из двух этапов:

- регулярное посещение всех занятий в течение всего семестра, а также активное изучение рекомендованной литературы;

- непосредственная подготовка к зачету, когда студенту в короткий срок нужно охватить весь изученный материал по дисциплине.

Для определения уровня сформированности компетенций предлагаются следующие критерии оценки ответа на зачете:

- *«**зачтено**», если студент обнаружил знание основного программного материала в объёме, необходимом для дальнейшей учёбы и предстоящей работы по профессии; справился с выполнением заданий, предусмотренных программой; знаком с основной литературой, рекомендованной программой;*

– *«**не зачтено**» выставляется студенту при пробелах в знаниях основного программного материала, допустившему принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой заданий*

Вопросы к зачету

1. Математическая теория игр. Игровая интерпретация стратегического поведения экономического агента в конкурентной среде (М.Портер).
2. Базовые понятия теории игр: цель, игроки, ходы, партия, выигрыш, ресурсы и платежи.
3. Классификация игр: по характеру получения информации, по составу игроков, по виду функции выигрыша, по количеству игроков и стратегий.
4. Развёрнутая (позиционная), матричная и нормальная форма представления игры и методы решения.
5. Равновесие по Нэшу. Соотношение ситуаций равновесия по Нэшу и Парето-эффективности.
6. Оптимальность: выгодность и устойчивость.
7. Рыночные игры типа «агрессия-лояльность».

8. Ограничения и проблемы практического применения аппарата теории игр в экономике.

9. Критерии принятия решений в условиях риска: критерий ожидаемого значения, критерий предельного уровня.

10.Классические критерии принятия решений в условиях неопределённости: минимаксный критерий: критерий Байеса-Лапласа. 1

1.Классические критерии принятия решений в условиях неопределённости: критерий Сэвиджа.

12.Производные критерии принятия решений в условиях неопределённости: критерий Гурвица и критерий Ходжа-Лемана.

13.Производные критерии принятия решений в условиях неопределённости: критерий Гермейера и критерий произведений.

14.Критерии Сэвиджа и Гурвица в инвестиционной стратегии.

15.Основное функциональное уравнение Беллмана и пошаговый метод распределения ресурсов, инвестиций и загрузки мощностей.

16.Антагонистические игры. Чистые стратегии игроков. Минимаксные и максиминные стратегии.

17.Понятие седловой точки функции: проблема существования и единственности. Теорема о минимаксе. Седловой элемент платёжной матрицы. Цена игры.

18.Понятие смешанной стратегии и случайные ходы. Верхнее и нижнее значения игры.

19.Теорема Нэша. Оптимальная смешанная стратегия.

20.Функции наилучших ответов, кривые реакции.

21.Сведение антагонистической игры к паре двойственных задач линейного программирования.

22.Игры порядка 2Х2 и методы их решения. Доминирование.

23.Игры порядка 2Xm и nX2 и их Графическое решение

24.Подыгра. Сведение решения конечной антагонистической игры к задаче линейного программирования.

25.Связь между существованием решения задачи линейного программирования в стандартной форме и седловой точкой функции Лагранжа.

26.Итеративный метод Брауна решения матричных антагонистических игр.

27.Биматричная форма представления игры. Возможность сговора и создание коалиции.

28.Некооперативная игра двух лиц. Решение биматричных игр в смешанных стратегиях.

29.Осторожное поведение, минимаксный и максиминный принципы оптимальности в игре с ненулевой суммой.

30.Кооперативная игра двух лиц. Понятие сговора. Переговорное множество и выпуклая оболочка.

31.Ядро. Понятие арбитража и арбитражного решения в играх.

32.Метод Шепли. Вектор Шепли и супермодулярные игры.

33.Понятие коалиции. Характеристическая функция. Игра с переговорами двух лиц.

Творческие задания к зачету

Задание 1

Три человека решают, как провести вечер. Каждый выбирает, к какому из своих двух друзей отправится в гости или же остаться дома и самому ждать гостей. Выигрыш игрока, оставшегося дома, равен числу пришедших гостей. Выигрыш каждого гостя на α меньше. Выигрыш человека, не заставшего хозяина дома, равен –α. Постройте модель данной ситуации в виде игры. Найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях в зависимости от α.

Задание 2

Два джентльмена решили устроить дуэль. У каждого есть пистолет с одним патроном. По правилам дуэли оба соперника стоят в 40 шагах друг от друга и должны синхронно двигаться навстречу. В любой момент к5аждый из них может выстрелить. Вероятность того, что он попадет и убьет своего соперника равна $p(x)$, где $x \in \{0, 1, ..., 20\}$ – число шагов, которое сделал дуэлянт. Пусть $p(x)$ – возрастающая функция, $p(0)=0$, $p(20)=1$. Каждый дуэлянт решает, на каком шаге ему сделать выстрел. Если один из дуэлянтов делает выстрел и промахивается, то оба они продолжают двигаться навстречу, после чего другой дуэлянт убивает его с вероятностью 1. Еайдите равновесие в этой игре. Считать, что выигрыш равен 0, если дуэлянт умер и 1, если остался жив.

Задание 3

Полковник Блотто командует тремя отрядами. Перед ним расположены три высоты. Он должен решить, сколько отрядов послать на захват каждой высоты. Его противник, граф Балони, также имеет в подчинении три отряда и должен принять аналогичное решение. Если на одной высоте у одного противника численное преимущество, то он захватывает эту высоту. Если нет, высота остается нейтральной территорией. Выигрыш каждого игрока равен количеству захваченных им высот минус количество высот, захваченных противником. Сколько чистых стратегий у каждого игрока? Какие будут равновесия?

Задание 4

У двух авиапассажиров, следовавших одним рейсом, пропали чемоданы. Авиакомпания готова возместить ущерб каждому. Чтобы определить размер компенсации, пассажиров просят оценить содержимое чемоданов. Каждый пассажир может назвать сумму от 2$ до 100$/условия компенсации таковы: если оба сообщают одну и туже сумму, то каждый из них получит эту сумму в качестве компесации. Если же заявленный ущерб одного из пассажиров окажется меньше, чем у другого, они оба получат одинаковую меньшую сумму. При этом тот, кто назовет меньшую сумму, получит дополнительно 2 $, кто назовет большую – потеряет 2$. Найдите равновесие Нэша. Как вы думаете, будут ли в реальности стратегии пассажиров отличаться от равновесных.

Задание 5

Нефтяная компания *X* в трех регионах имеет монополию на поставку бензина. Компания *Y* собирается построить сеть своих заправок в одном из регионов; компания *X* намерена ей помешать. Компания *Y* выбирает регион, компания *X* – в каком из регионов бороться с кампанией *Y* путем административного ресурса . Если компания *Y* выбрала регион *i*, а компания *X* – другой регион, то *Y* выигрывает V_i, *X* проигрывает туже величину. Если обе компании выбрали одинаковые регионы,, то каждая получает нулевой выигрыш. Найдите равновесие в смешанных стратегиях при условии, что $V_1 > V_2 > V_3 > 0$.

Задание 6

Население в некоторой стране может заниматься одним из двух видов деятельности: работать или воровать у тех, кто работает. Пусть $V \in [0,1]$ –доля работающего населения. Пусть α –максимальный доход работающего человека, $\gamma < \alpha$ – его гарантированный доход. Таким образом, максимальная сумма, которую можно украсть у работающих $(\alpha - \gamma) \cdot V$. Пусть β – максимальная сумма, которую один человек может украсть. Следовательно, всего может быть украдено не более $\beta \cdot (1 - V)$. Если $V > \beta / (\alpha + \beta - \gamma)$, то количество украденного будет меньше, чем $(\alpha - \gamma) \cdot V$; при $V \le \beta / (\alpha + \beta - \gamma)$ оно будет равно $(\alpha - \gamma) \cdot V$. Как выигрыши работающего и ворующего зависят от *V*? Найдите равновесие в игре, в которой каждый человек решает, чем ему заняться в жизни: работой или воровством.

Задание 7

Рассмотрим антагонистическую ситуацию, участниками которой являются, с одной стороны, государственная налоговая инспекция, а с другой – конкретный налогоплательщик с годовым доходом 180 тыс. руб.

У государственной налоговой инспекции – два возможных способа действия. Один из них состоит в контролировании дохода налогоплательщика и взимании с него:

– налога в размере 13%, если налогоплательщик заявил свой действительный доход в 180 тыс. руб.;

– налога в размере 13% от 180 тыс. руб. и штрафа в размере 10% от незаявленной налогоплательщиком суммы, если налогоплательщик заявил доход меньше 180 тыс. руб. или срыл свой доход вовсе.

Другой способ действия налоговой инспекции заключается в том, чтобы вообще не контролировать доход налогоплательщика, полагаясь на его честность.

Налогоплательщик при декларировании своего дохода использует одну из трех стратегий поведения:

1) заявить о действительном доходе в 180 тыс. руб.;
2) заявить доход в 90 тыс. руб.;

3) скрыть доход.

Составить платежную матрицу игры. Какая стратегия налоговой инспекции гарантирует взимание с налогоплательщика налога, не меньшего 23 400 руб.

Задание 8

Две фирмы, *A* и *B*, проводят рекламную компанию на предполагаемых рынках сбыта, в каждом их двух соседних городов. У фирмы *A* имеются средства, чтобы оплатить 4 способа проведения рекламной кампании, у фирмы *B* – средства на три способа. Победу каждой фирмы (для определенности – фирмы *A*) в каждом из городов будем оценивать в условных единицах (очках) следующим образом:

– если у фирмы *A* больше способов рекламы, чем у противника, то в качестве выигрыша она получает число очков, равное числу способов рекламы, примененных противником в данном городе плюс одно очко за победу;

– если у фирмы *A* меньше способов рекламы, чем у противника, то она проигрывает число очков, равное числу способов рекламы, примененных ей в данном городе минус одно очко за проигрыш;

– если число способов рекламы в городе у обеих фирм одинаковое, то каждая из них получает нуль очков.

В качестве общих выигрышей каждой из фирм принимаем суммы ее очков по двум городам в различных ситуациях.

Составить матрицу выигрышей фирмы *A*. Существует ли среди стратегий фирмы *B* стратегия, гарантирующая ей проигрыш не более чем в 2 очка при любой из пяти стратегий фирмы *A*?

Задание 9

Ежемесячно страховая компания *A* страхует 100 объектов фирмы *B*. Каждый объект страхуется на 10 000 руб. Страховщик забирает себе 10% от страховой суммы при заключении контракта. В следующем году страховщик намерен увеличить свой доход путем повышения ставки на 1%, 2% или 3%.

Страхующаяся фирма не намерена увеличивать расходы на страхование, поэтому готова уменьшить количество страхующихся объектов на 5, 10 или 15 штук.

Смоделируйте дальнейшее сотрудничество страховой компании со страхователем, построив ее матрицу выигрышей. При каких условиях оно остается выгодным для страховщика?

Задание 10

Постройте платёжную матрицу системы противовоздушной обороны (игрока А), целью которой является поражение как можно большего количества самолётов противника (игрока В). Задача противника – преодолеть систему противовоздушной обороны, потеряв при этом как можно меньше самолётов.

Система противовоздушной обороны прикрывает участок территории, располагая двумя зенитно-ракетными комплексами, зоны действия которых не пересекаются. Каждый зенитно-ракетный комплекс с единичной вероятностью поражает самолёт противника в зоне своего действия, если его система наведения начинает отслеживать цель и вырабатывать данные для стрельбища ещё за пределами зоны. Противника располагает. Двумя самолётами, каждый из которых может быть направлен в зону действия любого зенитно-ракетного комплекса. В момент, когда система противовоздушной обороны решает, какому зенитно-ракетному комплексу по какой цели стрелять, самолёты противника могут применить обманный манёвр и изменить маршрут.

Библиографический список

1. *Красс, М. С.* Математика в экономике: математические методы и модели : учебник для бакалавров / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов ; под ред. М. С. Красса. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 541 с.

2. *Фомин, Г. П.* Экономико-математические методы и модели в коммерческой деятельности : учебник для бакалавров / Г. П. Фомин. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

3. *Гармаш, А. Н.* Экономико-математические методы и прикладные модели : учебник для бакалавриата и магистратуры / А. Н. Гармаш, И. В. Орлова, В. В. Федосеев. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. –328 с.

4. *Попов, А. М.* Экономико-математические методы и модели : учебник для прикладного бакалавриата / А. М. Попов, В. Н. Сотников ; под общ. ред. А. М. Попова. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

5. *Дубина, И. Н.* Основы математического моделирования социально-экономических процессов : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / И. Н. Дубина. — М. : Издательство Юрайт, 2017.
6. *Королев, А. В.* Экономико-математические методы и моделирование : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / А. В. Королев. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 280 с.

7. *Смагин, Б. И.* Экономико-математические методы : учебник для академического бакалавриата / Б. И. Смагин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 272 с.
8. Гусева, Е.Н. Экономико-математическое моделирование. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — М. : ФЛИНТА, 2016. — 216 с.
9. *Конюховский, П. В.* Теория игр + CD : учебник для академического бакалавриата / П. В. Конюховский, А. С. Малова. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 252 с.
10. *Челноков, А. Ю.* Теория игр : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / А. Ю. Челноков. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 223 с.
11. *Шагин, В. Л.* Теория игр : учебник и практикум / В. Л. Шагин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 223 с.
12. *Шиловская, Н. А.* Теория игр : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / Н. А. Шиловская. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины

Электронные библиотечные системы

1. Университетская библиотека онлайн http://biblioclub.ru/
2. Издательство «ИВИС» http://ebiblioteka.ru/
3. Научная электронная библиотека http://elibrary.ru/

Электронные информационные справочные системы

1. www.exponenta.ru;
2. www.shool.edu.ru;
3. http:/e-lib.uspu.ru
4. biblioclub.ru – «Университетская библиотека онлайн»
5. ebiblioteka.ru – издательство «ИВИС»
6. elibrary.ru – научная электронная библиотека